خواص أسعار الظل Shadow Prices

بإستطاعتنا الآن أن ننتقل إلى إستعراض الخواص الميكانيكية لما أسميناه بالقيم المقابله أو ما سوف نطلق عليه منذ الآن أسعار الظل وذلك زيادة فى الوضوح (خاصة وأن هذا هو الأسم الأكثر شيوعاً) .

الخاصية الأولى (الخاصية التجميعية)

يلاحظ أن أسعار الظل الثلاثه الوارده أسفل تابلوه السمبلكس الأخير هى ٧ ، ٤ ، ١٥ . كما أن وحدات الطاقة المتاحه فى الأقسام الثلاثة هى ٢٠٠٠٠ ، ٦٣٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ على التوالي . لننظر الآن ماذا يحدث لو أننا قمنا بعملية الضرب والأضافه التاليه :

٧ × ٢٠٠٠٠ =	١٤٠٠٠٠
٤ × ٦٣٠٠٠ =	٢٥٢٠٠٠
١٥ × ١٠٠٠٠ =	١٥٠٠٠٠
	٥٤٢٠٠٠

أى أن المجموع يساوى القيمة المثلى لدالة الهدف (ولتكن ف)

الخاصية الثانية (الخاصية التحليلية)

إذا أطلقنا على الخاصية الأولى تعبير الخاصيه التجميعية فإن هناك خاصية تحليلية أخرى لأسعار الظل هى : أنه إذا كان حاصل الضرب والأضافه فى الخاصية الأولى قد أدى إلى الوصول إلى القيمة المثلى لدالة الهدف ، فإن حواصل الضرب فقط دون الأضافه لها خاصية تحليليه إذ أنها تجزئ قيمة دالة الهدف بين العناصر الثلاثه بحيث يمكن القول بأن :

مساهمة العنصر الأول فى القيمة المثلى لدالة الهدف

= ٧ × ٢٠٠٠٠ = ١٤٠٠٠٠ جنيه

مساهمة العنصر الثانى فى القيمة المثلى لدالة الهدف

= ٤ × ٦٣٠٠٠ = ٢٥٢٠٠٠ جنيه

مساهمة العنصر الثالث فى القيمة المثلى لدالة الهدف

= ١٥ × ١٠٠٠٠ = ١٥٠٠٠٠ جنيه

الخاصية الثالثة (التقييم الإقتصادى لوجوه النشاط)

يلاحظ أن لدينا أربعة منتجات مستويات إنتاجها هى س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، س$_٤$. وأن معاملات دالة الهدف المصاحبة لها (أى فائض المساهمة للوحدة الواحدة من كل) هى ٤ ، ١٢ ، ١٥ ، ٦٧ جنيها على التوالى . كما أن كلا من هذه المنتجات يستهلك أقداراً محدده من العناصر الإنتاجية الثلاثة . ونويد الأن أن نعقد مقارنة بين عائد الوحدة الواحدة (أى فائض المساهمة للوحدة) وبين مجموع القيم الإقتصادية لما تستهلكه هذه الوحدة من كل عنصر ، وتحسب هذه القيمة الإقتصادية بضرب سعر الظل للعنصر فى مقدار ما تستهلكه وحدة المنتج من هذا العنصر . ونوضح فى الجدول التالى البيانات اللازمة لعقد هذه المقارنة .

فإذا ما عقدنا مقارنة عمودية بين الأرقام الموجوده فى كل عمود فلسوف تخرج كالآتى :

المنتج الذى مستوى إنتاجه العنصر	٤ س$_١$	١٢ س$_٢$	١٥ س$_٣$	٦٧ س$_٤$
الأول	٧ × ٢ = ١٤	٧ × ٠ = ٠	٧ × ٠ = ٠	٧ × ٤ = ٢٨
الثانى	٤ × ٠ = ٠	٤ × ٣ = ١٢	٤ × ٠ = ٠	٤ × ٦ = ٢٤
الثالث	١٥ × ٠ = ٠	١٥ × ٠ = ٠	١٥ × ١ = ١٥	١٥ × ١ = ١٥
	١٤	١٢	١٥	٦٧

المنتج $س_١$ ١٤ > ٤   ولذا نجد أن المنتج لم يرشح ليكون ضمن برنامج الإنتاج الأمثل .

المنتج $س_٢$ ١٢ = ١٢   ولذا رشح هذا المنتج ليكون ضمن برنامج الإنتاج الأمثل .

المنتج $س_٣$ ١٥ = ١٥   ولذا رشح المنتج ليكون ضمن برنامج الإنتاج الأمثل .

المنتج $س_٤$ ٦٧ = ٦٧   ولذا رشح هذا المنتج ليكون ضمن برنامج الإنتاج الأمثل .

ونعتقد أنه قد حان الوقت لكى نضفى صيغة إقتصادية على هذا الجانب الرياضى المفهوم أسعار الظل الأمر الذى يساعد على تفهم كثير من الخصائص التى ذكرناها أنفا والتى سيرد دكرها مؤخراً .

فى المثال الذى أوردناه كان الهدف فى المشكلة الأصلية هو تحديد برنامج الإنتاج الأمثل ($س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$) والذى يترتب عليه تحقيق أكبر فائض مساهمة ممكن (ف) . وفى هذا المثال كان لدينا ثلاثة أنواع من عناصر الطاقة الثابته (تحددت المقادير المتوافره منها فى الطرف الأيسر لمجموعة القيود) . ويمثل سعر الظل القيمة الإقتصادية للوحدة الواحدة من كل من هذه العناصر . وهذه القيمة ليست قيمة سوقية تحددت بفعل قوى السوق - أيا كانت طبيعة أو تركيب هذه القوى - وإنما هى قيمة محتسبه تحدد مدى مساهمة الوحدة الواحدة من عناصر الإنتاج الثابته فى تحقيق الفائض (ومن ثم مدى المساهمة الإجمالية لكل عنصر من هذه العناصر فى تحقيق هذا الفائض) .

وينظر إلى سعر الظل أيضاً على أن تكلفة الفرصة المضاعة لعنصر ما . ولذا فإنه فى حالة إستنفاذ الطاقة المتاحة من أحد العناصر فإن سعر الظل يكون ≤ صفر . أما إذا لم تستفذ الطاقة المتاحه من هذا العنصر بالكامل فإن سعر

الظل لهذا العنصر لابد وأن يساوى بالضروره صفراً حيث تكون هذه هى قيمته الإقتصادية كسلعة متاحه بوفره .

لننظر الآن إلى قيود المشكلة المقابله لعلنا نستشف من وراء الشكل الذى تبدو عليه بعض المعلومات الهامه . فالقيد الأول على سبيل المثال يبدو على الصوره التاليه :

$$٢ ص_{١} \geq ٤$$

ولتفسيرهذا القيد دعنا نذكر أولا أن هناك قيداً فى المشكلة المقابله مقابل كل متغير فى المشكلة الأصلية . وهذا القيد هو القيد الأول وهو يقابل المتغير $س_{١}$ فى المشكلة الأصلية . وتفسير هذا القيد يكون كالآتى :

١ - أن معامل $ص_{١}$ فى الطرف الأيمن له معنى محدد واضح فى المشكلة الأصليه ألا وهو عدد الوحدات التى يستنفذها إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج الذى مستوى إنتاجه $س_{١}$ من عنصر الطاقة الأول (والوحيد اللازم لإنتاج هذا المنتج) .

٢ - أن $ص_{١}$ (وهو ما نهدف إلى تحديد قيمته) هو سعر الظل لعنصر الطاقة الأول ، أى التكلفة الإقتصادية للوحدة الواحدة من هذا العنصر .

٣ - مماسبق يتضح أن الطرف الأيمن للقيد عبارة عن التكلفة الإقتصادية للموارد التى يجب التضحية بها لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الذى مستوى إنتاجه $س_{١}$.

٤ - الطرف الأيسر لهذا القيد عبارة عن معامل $س_{١}$ فى دالة الهدف فى المشكلة الأصليه ، وهو عبارة عن فائض المساهمة للوحدة الواحدة من المنتج الذى مستوى إنتاجه $س_{١}$.

٥ - أى أن هذا القيد يشترط أن تكون التكلفة الإقتصادية لإنتاج الوحدة الواحدة من المنتج الذى مستوى إنتاجه $س_{١}$ تساوى على الأقل عائد الوحدة الواحدة من هذا المنتج .

٦ - ولكن لما كانت المشكلة المقابلة هى مشكلة تحقيق القيمة الدنيا لدالة الهدف، فإن تطبيق إجراءات السمبلكس المعتادة سوف يؤدى إلى إختيار قيمة ص (أى سعر الظل) بحيث تتحقق أقل قيمة لدالة الهدف .

٧- يأخذ كل من النقطتين الأخيرتين مما يتضح أن المشكلة المقابلة سوف تسير فى إتجاه إختيار قيم ص التى تجعل الطرف الأيمن يساوى الطرف الأيسر ولايزيد عليه كلما أمكن ذلك .

٨ - فى الحالات التى تزيد فيها قيمة الطرف الأيمن على الطرف الأيسر ، أى عندما تزيد التكلفة الإقتصادية لإنتاج الوحدة من المنتج ما عن فائض المساهمة للوحدة من هذا المنتج ، فإن المنتج المقابل لهذا القيد لن يدخل الحل الأمثل . فى المثال الذى أمامنا حدث هذا بالنسبة للمنتج الذى مستوى إنتاجه $س_١$ ، ولذا فإن برنامج الحل الأمثل لم يتضمن هذا المنتج

ولنأخذ كمثال أخير القيد الرابع من نفس المشكلة ، ألا وهو :

$$٤ ص_١ + ٦ص_٢ + ص_٣ \leq ٦٧$$

وهذا القيد يقابل المتغير $س_٤$ فى المشكلة الأصلية . وهنا أيضاً نجد أن معاملات الطرف الأيمن (وهى ٤ ، ٦ ، ١) عبارة عن المقادير التى تستنفذها الوحدة الواحدة من المنتج الذى مستوى إنتاجه $س_٤$ من كل من عناصر الطاقة الثلاثة على الترتيب . فإذا ضربنا كلا من هذه المقادير فى سعر الظل المقابل له وجمعنا النواتج فإن هذا يعطينا الطرف الأيمن من القيد ، وهو يساوى التكلفة الإقتصادية لإنتاج وحده واحده من هذا المنتج ، ولابد أن تساوى هذه التكلفة على الأقل العائد من الوحدة الواحدة من هذا المنتج .

وكما قلنا فإنه إذا تساوت هذه التكلفة مع العائد رشح المنتج لبرنامج الإنتاج الأمثل . أما إذا زادت هذه التكلفة فإن برنامج الإنتاج الأمثل لن يتضمن هذا المنتج . وفى هذه الحالة فإنه بالنسبة للمنتج الذى مستوى إنتاجه $س_٤$ نلاحظ أن

$$٤\,(٧) + ٦\,(٤) + ١\,(١٥) \leq ٦٧$$
$$٦٧ = ٦٧$$

ويمثل المنتج الذى مستوى إنتاجه $س_٤$ أحد أركان برنامج الإنتاج الأمثل .

الخاصية الرابعة : (الخاصية التكاملية)

وقد لاتكون بيانات المثال الذى بين أيدينا الآن كافية لتوضيح كل أركان هذه الخاصية ، ولكن يستطيع القارئ أن يعيد النظر فيماسبق وفى ما سوف نعرض له لاحقاً ليتأكد من توافر كل أركان هذه الخاصية .

لعل القارئ يتذكر أننا قد فسرنا متغيرات القصور بأنها تلك المتغيرات التى تعبر عن قصور الطرف الأيمن عن بلوغ الطرف الأيسر فى مجموعة القيود . وهكذا فإن ظهور $س_٥$ مثلاً فى الحل بقيمة موجبة يعنى أن كمية الطاقة المتاحة من العنصر الأول لم تستغل بالكامل . كما أن ظهور $س_٦$ بقيمة موجبة فى الحل يعنى أيضاً أن الطاقة المتاحة من العنصر لم تستغل بالكامل . وأخيراً فإن ظهور $س_٧$ فى الحل بقيمة موجبة يعنى أن الطاقة المتاحة من العنصر الثالث لم تستنفد بالكامل . ولكن ما الذى حدث فى المشكلة التى أمامنا هنا ؟ الذى حدث فعلاً أن كلا من $س_٥$ ، $س_٦$ ، $س_٧$ لم يظهر فى الحل ، وهذا دليل على أن الطاقة المتاحة من العناصر الثلاثة قد استنفدها برنامج الإنتاج الأمثل تماماً . والنتيجة الحتمية لذلك هى أن أسعار الظل كلها $\leq$ صفر . تلك واحدة من النظريات الأساسية فى البرمجة الخطية يطلق عليها نظرية التكامل Complementary Slackness Theorem .

وفى ظل نظرية التكامل هذه ما الذى يمكن أن يحدث لو أن أحد متغيرات القصور قد ظهر فى الحل بقيمة موجبة ؟ الذى كان لابد من حدوثه لو أن أحد متغيرات القصور قد ظهر فى الحل بقيمة موجبة (والذى يدل على أن الطاقة المتاحة من العنصر المقابل له لم تستنفد بالكامل) هو أن سعر الظل المقابل لهذا العنصر لابد وأن يساوى صفر

ونوجز فى الجدول التالى عرض هاتين الحالتين :

إذا كان متغير القصور $س_ل$	فإن عنصر الإنتاج المقابل له	ويكون سعر الظل
> صفر	لم يستنفذ بالكامل	= صفر
= صفر	يكون قد استنفذ بالكامل	≥ صفر

وهكذا فإن نظرية التكامل تقضى بأن :

قيمة متغير القصور × سعر الظل المقابل = صفر

ومنطق هذه القاعدة واضح ، وذلك لأن حدى الطرف الأيمن إما صفريان أو أن أحدهما موجب والآخر صفرى . وفى كلتا الحالتين فان حاصل الضرب لابد وأن يساوى صفر .

الخاصية الخامسة : (الخاصية التجنيسية)

هناك ثلاثة من أسعار الظل (واحداً لكل من العناصر أو الموارد الثلاثة) هى ٧ ، ٤ ، ١٥ . ولكن ما هو التمييز الذى يمكن أن يصاحب هذه الأرقام ؟ هل هى جنيهات ، أم ساعات ، أو كيلو جرامات ، أم أمتار ، ... إلى آخر ذلك من الصفات التى يمكن أن تطلق على هذه القيم ؟ والإجابة هى أن التمييز أو الصفة التى يمكن أن تطلق على هذه القيم هى من نفس جنس التمييز أو الصفة التى تطلق على قيمة دالة الهدف . فإذا كانت معاملات دالة الهدف فى مشكلة ما مقيسة بالجنيهات فإن الصفة المصاحبة لأسعار الظل تكون جنيها . وإذا كانت معاملات دالة الهدف فى مشكلة أخرى مقيسه بالكيلوجرامات فان الصفة التى تصاحب أسعار الظل تكون كيلوجراما . أما إذا كان معاملات دالة الهدف مقيسة بالساعات فان الصفة المصاحبة لأسعار الظل تكون ساعة ... وهكذا .

وفى المثال الذى أمامنا فإن معاملات دالة الهدف تعبر عن فائض المساهمة مقيساً بالجنيهات . وعليه فإن الأرقام الواردة لأسعار الظل تكون ٧ جنيهات ، ٤

جنيهات ، ١٥ جنيهاً . وتنطبق هذه القاعدة على كل الأحوال والظروف بلا إستثناء على الرغم من أن العناصر التى تقابلها هذه الأسعار قد يكون بعضها مقيساً بالجنيهات وبعضها بالدولارات والبعض الآخر بالساعات أو بالكيلوجرامات ... إلخ وذلك فى نفس المشكلة الواحدة .

الخاصية السادسة : (التقييم الإستراتيجى التعبوى)

رأينا أن هناك ثلاثة من أسعار الظل هى ٧ ، ١٤ ، ١٥ وأن هناك ثلاثة من العناصر الإنتاجية تبلغ الطاقة المتاحة منها ٢٠٠٠٠ ، ٦٣٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ساعة على التوالى . وقلنا أن كل واحدة من أسعار الظل الثلاثة يتعلق بواحد من العناصر الإنتاجية الثلاثة . وزيادة فى الإيضاح نقترح تلخيص ذلك على الصورة التالية :

العنصر	الطاقة المتاحة منه	سعر الظل
الأول	٢٠٠٠٠	٧
الثانى	٦٣٠٠٠	١٤
الثالث	١٠٠٠٠	١٥

ونستطيع الآن أن نقرر أن جانباً من هذه العلاقة يقضى بالآتى :

١ - أن زيادة الطاقة المتاحة من العنصر الأول ، مع بقاء العوامل الأخرى على حالها ، بمقدار وحدة واحدة (أى ساعة واحدة فى هذه الحالة) سوف يترتب عليه زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار ٧ جنيهات . أى أنه إذا كانت الطاقة المتاحة من العنصر الأول هى ٢٠٠٠١ بدلاً من ٢٠٠٠٠ فقط فإن فائض المساهمة الكلى يصبح ٥٤٢٠٠٧ جنيهاً بدلاً من ٥٤٢٠٠٠ جنيها فقط . ويستطيع القارئ أن يتحقق من ذلك بنفسه بأن يقوم بحل المشكلة من جديد متخذاً من القيمة ٢٠٠٠١ كطرف أيسر للقيد الأول بدلاً من ٢٠٠٠٠ ثم يرى

أثر ذلك على قيمة المتغيرات فى الحل النهائى ومن ثم على القيمة القصوى لدالة الهدف . وهناك طريقة مختصرة للتحقق من هذه النتيجة ، ألا وهى :

دع : أ = المصفوفة الموجودة فى التابلوه الأخير فى جدول السمبلكس تحت أعمدة المتغيرات الإضافية .

ب = متجهة القيم الجديدة للطرف الأيسر لمجموعة القيود (بعد إجراء التعديل الذى افترضناه) .

فيكون الحل الجديد هو $\underline{س} = \underline{أ} \times \underline{ب}$

$$\begin{pmatrix} س_٤ \\ س_٢ \\ س_٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٤} & ٠ & ٠ \\ -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} & ٠ \\ -\frac{١}{٤} & ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢٠٠٠١ \\ ٦٣٠٠٠ \\ ١٠٠٠٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥٠٠٠\frac{١}{٤} \\ ١٠٩٩٩\frac{١}{٢} \\ ٤٩٩٩\frac{٣}{٤} \end{pmatrix}$$

وتكون القيمة القصوى لدالة الهدف المقابلة لهذا الحل هى :

$$(٦٧ \quad ١٢ \quad ١٥) \begin{pmatrix} ٥٠٠٠\frac{١}{٤} \\ ١٠٩٩٩\frac{١}{٢} \\ ٤٩٩٩\frac{٣}{٤} \end{pmatrix} = ٥٤٢٠٠٧ \text{ جنيهات}$$

أى أن زيادة وحدات الطاقة من العنصر الأول بمقدار وحدة واحدة أدى إلى زيادة القيمة القصوى لدالة الهدف بمقدار ٧ جنيهات .

٢ - إن زيادة الطاقة المتاحة من العنصر الثانى ، مع بقاء العوامل الأخرى على حالها ، بمقدار وحدة واحدة (من ٦٣٠٠٠ إلى ٦٣٠٠١) يؤدى إلى زيادة القيمة القصوى لدالة الهدف بمقدار ٤ جنيهات . ويستطيع القارئ أن يتحقق من ذلك بنفسه على غرار ما أوضحنا من قبل .

٢- إن زيادة الطاقة من العنصر الثالث بمقدار وحدة واحدة – مع بقاء العوامل الأخرى على حالها – معناه زيادة القيمة القصوى لدالة الهدف بمقدار ١٥ جنيها . وبنفس الطريقة يستطيع القارئ أن يتحقق من ذلك .

الخاصية السابعة : (التخليق المباشر وغير المباشر)

عرفنا الآن كيف وأين نجد أسعار الظل . أما كيف ؟ فعن طريق حل المشكلة كالمعتاد ، وأما أين ؟ ففى ذلك المكان الذى حددناه فى صف إختبار المثالية فى التابلوه الأخير من الحل . أى أننا حصلنا على أسعار الظل كمنتج ثانوى لعملية البحث عن برنامج الأمثل . والآن إليك مايلى : إذا أسمينا المشكلة التى قمنا بحلها المشكلة الأصلية primal فإن هناك مشكلة مقابله Dual لهذه المشكلة يمكن تحضيرها من نفس المشكلة الأصلية وبحيث يؤدى حل المشكلة المقابلة إلى الحصول على أسعار الظل كمنتج رئيسى فى هذه الحالة (ويكون برنامج الإنتاج هو المنتج الثانوى هنا) . ويمكن تحضير هذه المشكلة الأصلية على النحو الوارد فى الصفحة السابقة .

Scanned with CamScanner

المشكلة الأصلية

ف = ٤ $س_1$ + ١٢ $س_2$ + ١٥ $س_3$ + ٦٧ $س_4$

(أكبر ما يمكن)

بشرط :

٢ $س_1$ + ٤ $س_4$ ≤ ٢٠٠٠٠

٣ $س_2$ + ٦ $س_4$ ≤ ٦٣٠٠٠

$س_3$ + $س_4$ ≤ ١٠٠٠٠

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ ≥ صفر

المشكلة المقابلة

ف*$_1$ = ٢٠٠٠٠ $ص_1$ + ٦٣٠٠٠ $ص_2$ + ١٠٠٠٠ $ص_3$

(أقل ما يمكن)

بشرط :

٢ $ص_1$ ≥ ٤

٣ $ص_2$ ≥ ١٢

$ص_3$ ≥ ١٥

٤ $ص_1$ + ٦ $ص_2$ + $ص_3$ ≥ ٦٧

$ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ ≥ صفر

كما نورد أيضاً حل المشكلة بهدف المقارنة بينه وبين حل المشكلة الأصلية .

المرحلة الثانية :

انتهت المرحلة الأولى بطرد جميع المتغيرات الوهمية من الأساس . ولبدء المرحلة الثانية فإنه يلزمنا فقط إعادة دالة الهدف لوضعها الأصلى الصحيح ثم إعادة حساب صف إختبار المثالية الجديد (بعد الإستغناء عن أعمدة المتغيرات الوهمية) . ويعكس التابلوه التالى الحل الأمثل للمشكلة المقابله .

ويمقارنة جدول السمبلكس لحل كل من المشكلة الأصلية والمشكلة المقابله يمكن أن نتبين مايلى :

أولاً : أن حل المشكلة الأصلية (بالنسبة للمتغيرات الأصلية) موجود أسفل الأعمدة الأضافية (غير الوهمية ، حيث أن هذه الأخيرة تلعب دوراً حسابياً فقط) فى تابلوه السمبلكس الأخير لحل المشكلة المقابلة . وبصفه عامة فإنه يمكن لنا أن نسترشد بالجدول التالى لتحديد حل أحدى المشكلتين عند قيامنا بحل المشكلة الأخرى .

		ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	ص٦	ص٧	ص٨	ص٩	ص١٠	ص١١	
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	١	١	١	
٠	ص١	١	٠	٠	٠	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٤}$	٠	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	٧
٠	ص٢	٠	١	٠	٠	$-\frac{١}{٣}$	٠	٠	٠				٤
٠	ص٣	٠	٠	١	٠	٠	١-	٠	٠				١٥
٠	ص٤	٠	٠	٠	١	١	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	١-	١-	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١٠
صف إختبار المثالية		٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١-	١-	١-	١-	٠

		٢٠٠٠٠	٦٢٠٠٠	١٠٠٠٠	٠	٠	٠	٠	
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	
٢٠٠٠٠	س١	١	٠	٠	٠	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٤}$	٧
٦٢٠٠٠	س٢	٠	١	٠	٠	$-\frac{١}{٣}$	٠	٠	٤
١٠٠٠٠	س٣	٠	٠	١	٠	٠	-١	٠	١٥
٠	س٤	٠	٠	٠	١	١	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٤}$	١٠
صف إختيار المثالية		٠	٠	٠	٠	-١١٠٠٠	-٥٠٠٠	-٥٠٠٠	٥٤٢٠٠٠

جدول حل المشكلة الأصلية		جدول حل المشكلة المقابلة	
أسفل الأعمدة الأصلية	أسفل الأعمدة الإضافية	أسفل الأعمدة الأصلية	أسفل الأعمدة الإضافية
قيم المتغيرات الإضافية (غير الوهمية) فى المشكلة المقابلة	قيم المتغيرات الأصلية فى المشكلة المقابلة	قيم المتغيرات الإضافية (غير الوهمية) فى المشكلة الأصلية	قيم المتغيرات الأصلية فى المشكلة الأصلية

ثانياً : توجد قيمة دالة الهدف فى نفس المكان بالجدولين .

فى ختام هذا الجزء يهمنا أن نؤكد أن البرمجة - خطية كانت أو غير خطية إنما هى أسلوب رياضى . وهى كأسلوب رياضى تعتبر فى حد ذاتها خاليه من المحتوى الإقتصادى أو من أى محتوى - شأنها فى ذلك شأن الأساليب الرياضية الأخرى - أو شأن الرياضة بصفة عامة والتى تكتسب عظمتها وشيوع إستخداماتها من حيادها . ولكنها مثل كثير من الأساليب الرياضية الأخرى - كأسلوب التفاضل والتكامل - يمكن أن تساعدنا فى الوقوف على الدلالات الهامة للبيانات الإقتصادية التى نستطيع جمعها أو التى يكون لدينا القدرة على افتراضها .

أما عن مساهمة الاقتصاديين أنفسهم فى تطوير الجانب الرياضى لأسلوب البرمجة فإن هذا يعد من قبيل حاجة من يستخدم الأداة أكثر من غيره للإشتراك فى تطويرها ، كما يعد من قبيل التكامل بين فروع المعرفة والذى يعد السمة الأساسية من سمات بحوث العمليات . ولقد سبق للإقتصاديين صياغة قانون تناقص الغله رغم إرتكازه على أسس تكنولوجية بحته ، كما أنهم قاموا أيضاً ودون سابق معرفة بصياغة أسس التحليل الحدى والتى إكتشفنا مؤخراً وجود

تشابه بينها وبين أسلوب التفاضل ، وإن كان إكتشاف الأخير قد جاء سابقاً لإكتشاف الإقتصاديين لأسلوب التحليل الحدى بعدة قرون .

العلاقة بين المشكلة الأصلية والمشكلة المقابلة ، جزئيات العلاقة

بالنظر إلى المشكلتين الأصلية والمقابلة ، ماذا يمكن القول على سبيل المقارنة بينهما وعلى طريق المساعدة فى تحضير احداهما من الأخرى ؟ ويمكن لنا إيجاز تلك العلاقة فيمايلى :

١ - إذا كانت المشكلة الأصلية تبغى الوصول إلى القيمة القصوى فإن المشكلة المقابلة تهدف إلى الوصول إلى القيمة الدنيا ، والعكس بالعكس .

٢- معاملات دالة الهدف فى المشكلة الأصلية تصبح هى الطرف الأيسر لمجموعة القيود فى المشكلة المقابله ، بينما الطرف الأيسر لمجموعة القيود فى المشكلة الأصلية يتحول ليصبح معاملات دالة الهدف فى المشكلة المقابله .

٣- تتحول علاقة المتباينه من النوع الأول فى المشكلة الأصلية إلى متباينه من النوع الثانى فى المشكلة المقابلة ، والعكس بالعكس . ولاينطبق ذلك على قيد عدم الساليه حيث تظل المتغيرات فى كلتا الحالتين مقيدة بألا تكون سالبة .

٤- مصفوفة الطرف الأيمن لمجموعة القيود فى المشكلة الأصلية هى نفسها بعد تحويرها مصفوفة الطرف الأيمن لمجموعة القيود فى المشكلة المقابلة .

٥- تستخدم مجموعة جديدة من المتغيرات فى المشكلة المقابله - (ص) مثلاً بدلاً من (س) فى المشكلة الأصلية .

٦- إذا كان عدد القيود فى المشكلة الأصلية وعدد المتغيرات ن فإنه فى المشكلة المقابله يصبح عدد القيود (ن) بينما عدد المتغيرات (م) . وتلك حقيقة مؤداها أنه مقابل كل متغير فى المشكلة الأصلية يوجد قيد فى المشكلة المقابله ، كما أن مقابل كل قيد فى المشكلة الأصلية يوجد متغير فى المشكلة المقابله

٧- قيمة دالة الهدف المثلى (ف) فى المشكلة الأصلية تساوى قيمة دالة الهدف المثلى (ف*) فى المشكلة المقابلة .

٨- من كل ماسبق يمكن أن نخلص إلى أن المشكلة المقابلة للمشكلة المقابلة هى المشكلة الأصلية نفسها أو يستطيع القارئ أن يتحقق من ذلك بنفسه .

ويشترط قبل إجراء عملية إشتقاق المشكلة المقابلة من المشكلة الأصلية ماليلى :

(أ) أن تكون القيود كلها فى صورة متباينات . (ويرجع ذلك بشئ من التبسيط إلى أنه فى مشكلة البرمجة الخطية المعتادة فإن عدد القيود دائماً ما يختلف عن عدد المتغيرات) .

(ب) أن تكون كل هذه المتباينات فى إتجاه واحد .

مثـــال :

المشكلة الأصلية		المشكلة المقابلة	
ف = ٤ س$_١$ + ٣ س$_٢$ + ٨ ص$_٣$	(أقل ما يمكن)	(ف*) = ٢ ص$_١$ + ٥ ص$_٢$	(أكبر ما يمكن)
بشرط :		**بشرط :**	
س$_١$ + س$_٣$	≤ ٢	ص$_١$	≥ ٤
س$_٢$ + ٢ س$_٣$	≤ ٥	ص$_٢$	≥ ٣
س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$	≤ صفر	ص$_١$ + ٢ ص$_٢$	≥ ٨
		ص$_١$ ، ص$_٢$	≤ صفر

فإذا كان أحد القيود على شكل معادلة فإنه يمكن تحويله إلى الصورة المطلوبة فى خطوتين . وتتمثل الخطوة الأولى فى أن تحل محل المعادلة متباينتين مختلفتى الإتجاه [1] : وتقضى ثانية الخطوتين بضرب إحدى المتباينتين فى -١ حتى يصير كلاهما فى إتجاه واحد . ويلاحظ أن إحلال قيدين محل القيد الأصلى الوارد فى صورة معادلة معناه أن هذا القيد الواحد فى المشكلة الأصلية سوف يؤدى إلى وجود متغيرين فى المشكلة المقابلة . كما وأن العمود المقابل لواحد من هذين المتغيرين فى المشكلة المقابلة هو عبارة عن العمود المقابل للمتغير الآخر مضروباً فى -١ . ومن دراستنا السابقه لموضوع المتغيرات غير مقيدة الأشارة ندرك أن هذين المتغيرين يمكن إحلالهما بمتغير واحد غير مقيد الإشارة . ومعنى هذا أنه توجد لدينا طريقتين لصياغة المشكلة المقابله نوضح كليهما بالمثال التالى :

مثـــال

$$ف = ٢س_١ + ٣ س_٢ + س_٣ \qquad \text{(أكبر ما يمكن)}$$

بشرط :

$$٥ س_١ + ٢س_٢ + ٤ س_٣ \geq ٨$$
$$٤ س_١ + ٣س_٢ + س_٣ \geq ٦$$
$$س_١ + ٢س_٢ + ٥ س_٣ = ٤$$
$$س_١ ، س_٢ ، س_٣ \geq صفر$$

ويستدعى الأمر وضع المشكلة فى صورة مناسبة قبل تحضير المشكلة المقابله لها . وهذه الصورة هى :

تكون غير

$$\text{ف} = ٢\text{س}_{١} + ٣\text{س}_{٢} + \text{س}_{٣} \qquad \text{(أكبر ما يمكن)}$$

بشرط :

$$-٥\text{س}_{١} - ٢\text{س}_{٢} - ٤\text{س}_{٣} \leq -٨$$

$$٤\text{س}_{١} + ٣\text{س}_{٢} + \text{س}_{٣} \leq ٦$$

$$\text{س}_{١} + ٢\text{س}_{٢} + ٥\text{س}_{٣} \leq ٤$$

$$-\text{س}_{١} - ٢\text{س}_{٢} \qquad \text{(أكبر ما يمكن)}$$

$$٥\text{س}_{٣} \leq -٤$$

$$\text{س}_{١}\text{، س}_{٢}\text{، س}_{٣} \geq \text{صفر}$$

أما المشكلة المقابلة لهذه المشكلة فهى :

$$\text{ف}^{*} = -٨\text{ص}_{١} + ٦\text{ص}_{٢} + ٤\text{س}_{٣} - ٤\text{س}_{٤} \qquad \text{(أكبر ما يمكن)}$$

بشرط :

$$-٥\text{ص}_{١} + ٤\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{٣} - \text{ص}_{٤} \geq ٢$$

$$-٢\text{ص}_{١} + ٣\text{ص}_{٢} + ٢\text{ص}_{٣} - ٢\text{ص}_{٤} \geq ٣$$

$$-٤\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢} + ٥\text{ص}_{٣} - ٥\text{ص}_{٤} \geq ١$$

$$\text{ص}_{١}\text{، ص}_{٢}\text{، ص}_{٣}\text{، ص}_{٤} \geq \text{صفر}$$

ومن الممكن صياغة المشكلة المقابلة بصورة مختصرة بعض الشئ على النحو التالى :

$$(\text{ف}^{*}) = -٨\text{ص}_{١} + ٦\text{ص}_{٢} + ٤\text{س}_{٣} \qquad \text{(أقل ما يمكن)}$$

بشرط :

$$-٥\text{ص}_{١} + ٤\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{٣} \geq ٢$$

$$-٢\text{ص}_{١} + ٣\text{ص}_{٢} + ٢\text{ص}_{٣} \geq ٣$$

$$-٤\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢} + ٥\text{ص}_{٣} \geq ١$$

$$\text{ص}_{١}\text{، ص}_{٢}\text{، ص}_{٣} \geq \text{صفر}$$

الأمر الذى يعنى أن ص٫ غير مفيد الأشارة .

ونورد الآن بعض الملاحظات الفنية عن العلاقة بين المشكلة الأصلية والمشكلة المقابلة .

١ - إذا كان للمشكلة الأصلية حل فلابد أن يكون للمشكلة المقابلة حل أيضاً . للبرهنة على ذلك - جزئياً - أنظر المثال الوارد فى الصفحة التالية .

٢ - إذا كان للمشكلة الأصلية حل غير محدود فقد يكون للمشكلة المقابلة حل غير محدود أيضاً وقد لايوجد لها حل .

الصورة العامة للعلاقة بين المشكلة الأصلية والمشكلة المقابلة

نعتقد أنه بإستطاعتنا الآن أن نستنتج الصورة العامة لكل من المشكلة الأصلية ومشكلتها المقابلة . وهاتان الصورتان نوردهما فى الصفحة بعد التالية .

مثـــال :

المشكلة الأصلية

$ف^* = ٣ س_١ + ٤ س_٢$ (أكبر ما يمكن)

بشرط :

$س_١ - س_٢ \leq -١$

$-س_١ + س_٢ \leq$ صفر

$س_١ ، س_٢ \geq$ صفر

الحـــل :

لا حل للمشكلة

المشكلة المقابلة

$ف^* = -ص_١$ (أقل ما يمكن)

بشرط :

$ص_١ - ص_٢ \geq ٣$

$-ص_١ + ص_٢ \geq ٤$

$ص_١ ، ص_٢ \geq$ صفر

الحـــل :

لا حل للمشكلة

الشكلة الأصلية :

ق = ر$_1$ س$_1$ + ر$_2$ س$_2$ + ... + ر$_ن$ س$_ن$ (أكبر ما يمكن)

بشرط :

أ$_{11}$ س$_1$ + أ$_{12}$ س$_2$ + ... + أ$_{1ن}$ س$_ن$ ≥ ب$_1$

أ$_{21}$ س$_1$ + أ$_{22}$ س$_2$ + ... + أ$_{2ن}$ س$_ن$ ≥ ب$_2$

. .

. .

. .

أ$_{م1}$ س$_1$ + أ$_{م2}$ س$_2$ + ... + أ$_{من}$ س$_ن$ ≥ ب$_م$

س$_1$ ، س$_2$ ، ... ، س$_ن$ ≤ صفر

الشكلة المقابلة :

ق* = ب$_1$ ص$_1$ + ب$_2$ ص$_2$ + ... + ب$_م$ ص$_م$ (أقل ما يمكن)

بشرط :

أ$_{11}$ ص$_1$ + أ$_{21}$ ص$_2$ + ... + أ$_{1ن}$ س$_ن$ ≤ ر$_1$

أ$_{12}$ ص$_1$ + أ$_{22}$ ص$_2$ + ... + أ$_{ن}$ س$_ن$ ≤ ر$_2$

. .

. .

. .

أ$_{1ن}$ ص$_1$ + أ$_{2ن}$ ص$_2$ + ... + أ$_{من}$ ص$_م$ ≤ ر$_ن$

ص$_1$ ، ص$_2$ ، ... ، ص$_ن$ ≤ صفر