الفصل الثانى

نموذج البرمجة الخطية

Linear Programming Model

ويحتوى هذا الفصل على المباحث التالية:

المبحث الأول: تحضير مشكلة البرمجة الخطية

Problem Formulation

المبحث الثـــانى: طريقـــة التحليـــل (التمثيـــل) البيـــانى لنمـــوذج البرمجة الخطية

Graphic Analysis Method of Linear Programming Model

المبحث الثالث: الطريقة الجبرية (طريقـــة الســـمبلكس) لمشـــكلة البرمجة الخطية

Simplex Method of Linear Programming Model

المبحث الرابع: المشكلة المقابلة فى نموذج البرمجة الخطية[1]

The Dual in Linear Programming Model

Scanned with CamScanner

الفصل الثانى

البرمجة الخطية

Linear Programming

يعد نموذج البرمجة الخطية من أكثر أساليب بحوث العمليات إنتشاراً وأكثرها إستخداماً علمياً وعملياً ، حيث يطبق على نطاق واسع فى مجالات عديدة ونشاطات مختلفة فى الحياة العملية .

ويعتبر نموذج البرمجة الخطية Linear Programming طريقة فعالة تساعد فى الوصول إلى الحل الأمثل أو القرار الأمثل Optimal Decision من بين مجموعة من القرارات المتاحة ، وهذا القرار الأمثل يحقق الهدف الذى تبغيه الإدارة من حل المشكلة فى ضوء المحددات أو القيود المحيطة بهذه المشكلة .

وتتعلق المشكلة التى ينطبق عليها نموذج البرمجة الخطية بالمواقف التى تكون فيها فى حاجة إلى تخصيص مورد أو مجموعة من الموارد النادرة Scarce Resources (مواد ، عمالة ، آلات ، رأسمال ..... إلخ) بأفضل الطرق المتاحة Best Possible Manner والتى تؤدى إلى تعظيم الأرباح Maximizing Profits أو تدنية التكاليف Minimizing Costs أى أن مشكلة البرمجة الخطية تتعلق بالمواقف التى تتصف بالآتى :

(١) الموارد المحدودة : حيث أن محدودية الموارد تمثل النقطة الأساسية التى تواجه الإدارة . فهناك دائماً إمكانات محدودة غير مطلقة تود المنشأة إستغلالها الإستغلال الأمثل ، وتتمثل فى (مواد خام ، عمالة ماهره ، آلات ، عملات أجنبية ، .... إلخ) .

(٢) الإستخدامات البديلة : مع وجود مشكلة محدودية الموارد تواجه الإدارة

Scanned with CamScanner

مشكلة توزيعها بين إستخدامات عديدة . وهنا لابد أن يكون هناك معيار لعملية تخصيص هذه الموارد بين تلك الإستخدامات البديلة المتنافسة .

(٣) معيار الأفضلية : حيث تتم عملية المقارنة بين البدائل المتاحة لإختيار أفضلها . وأفضل البدائل هو الذى يحقق أفضل نتائج للمنشأة فى ضوء ما يستهلكه من الموارد المحدودة .

كما وأن مفهوم نموذج البرمجة الخطية يصف بدقة المشكلات التى ويمكن هيكلة بناؤها بصورة تحقق المتطلبات التالية :

(أ) متغيرات المشكلة القرارية (المتغيرات الأصلية) .

(ب) معيار المفاضلة بين متغيرات المشكلة أو ما يطلق عليها دالة الهدف ويمكن صياغتها فى مشكلة معادلة خطية Linear Function .

(جـ) القواعد التى تحكم عملية التشغيل أو ما يطلق عليها قيود دالة الهدف يمكن ترجمتها فى شكل معادلات خطية Linear Equations أو متباينات خطية Linear Inequalities .

هذا وهناك أسباب عديدة لإستخدام نموذج البرمجة الخطية فى الحياة العملية منها :

(١) غالبية المشاكل فى مجالات متعددة يمكن ترجمتها وتصويرها فى شكل يتفق مع خصائص نموذج البرمجة الخطية .

(٢) توافر الأساليب الفعالة لحل مشكلة البرمجة الخطية كما تتوافر حالياً برامج مختلفة على الحاسبات الآلية تتعامل مع هذه النوعية من المشاكل توفيراً للجهد والوقت .

(٣) سهولة التعامل مع المشكلة بالتعديل والتحوير إذا ما إقتضت ظروف الواقع نوعاً من التعديل فى متغيرات المشكلة عن طريق تحليل الحساسية Sensitivity Analysis .

Scanned with CamScanner

ومن الحقائق الثابتة فى الوقت الحالى لابد أن يتضمن نموذج البرمجة الخطية مرحلتين هما :

المرحلة الأولى : مرحلة بناء النموذج أو تحضير المشكلة وهى تتعلق بتحويل المشكلة من الشكل الوصفى إلى شكل رياضى يمكن التعامل معه بالأساليب الرياضية الحديثة .

المرحلة الثانية : مرحلة حل النموذج والتى تتعامل مع متغيرات المشكلة بعد ترجمتها فى شكل علاقات رياضية يسهل التعامل معها بالأسلوب الرياضى .

وفى هذا الفصل سوف يتناول المبحث الأول وهو تحضير المشكلة فى ظروف متعددة ومشكلات مختلفة لكى يلم القارئ على عملية التحضر بنوع أكبر من المرونة . على أن نتعرض للنواحى الإجرائية لحل مشكلة البرمجة الخطية ودراسات ما بعد الأمثلية فيمابعد .

Scanned with CamScanner

المبحث الأول

تحضير مشكلة البرمجة الخطية

Problem Formulation

ويعنى تحضير المشكلة محاولة تحديد الأركان الرئيسية التى يجب أن يتكون فيها نموذج البرمجة الخطية (الموارد المحدودة ، الإستخدامات البديلة ، معيار الأفضلية) . ثم ترجمة هذه الأركان فى شكل نموذج رياضى أو تمثيل بيانياً .

ولتوضيح خطوات تحضير المشكلة سوف نبدأ بمثال مبسط يوضح مضمون وهدف كل خطوة من هذه الخطوات ، ويجب أن نكون فى هذه المرحلة على دراية كافية بأن هذه المرحلة إنما تتكون من ثلاث خطوات أساسية هى :

(١) صياغة المتغيرات القرارية Decision Variables

(٢) صياغة دالة الهدف Objective Function

(٣) صياغة القيود Constraints

(٤) صياغة قيود عدم السالبة Monnegativity Constraints

١- مثال على هدف تعظيم الأرباح :

شركة الأمل والوفاء تقوم بإنتاج وتوزيع نوعين من ألعاب الأطفال التى تهدف إلى تنمية وتطوير قدراتهم الذهنية . ولقد وفرت إدارة الشركة البيانات التالية :

(١) هناك بالشركة قسمين رئيسيين هما قسم التجميع وقسم التشطيب والتغليف .

(٢) تحتاج كل لعبه إلى وقت معين للتشغيل فى كل قسم ولقد أوضحت الدراسة

Scanned with CamScanner

الهندسية أن الوحدة الواحدة من النوع الأول من اللعب تتطلب ٦ ساعات في القسم الأول و ٤ ساعات في القسم الثاني . في حين أن الوحدة الواحدة من النوع الثاني من اللعب تتطلب ٥ ساعات في القسم الأول وثلاث ساعات في القسم الثاني .

(٣) تبلغ الطاقة اليومية لكل قسم كالآتي :

(أ) ٥٠ ساعة للقسم الأول .

(ب) ٤٠ ساعة للقسم الثاني .

(٤) تباع الوحدة من النوع الأول بسعر ٧٠ جنيه في حين أن تكلفتها المتغيرة ٤٤ جنيه .

(٥) تباع الوحدة من النوع الثاني بسعر ٦٥ جنيه أما تكلفتها المتغيرة فتبلغ ٤١ جنيه .

(٦) التكاليف الثابتة تبلغ ٥٢٠ جنيه في القسم الأول و٢٦٠ جنيه في القسم الثاني شهرياً .

المطلوب:

صياغة المشكلة السابقة في شكل نموذج برمجة خطية يعظم أقصى أرباح ممكنه .

الحـــــل

لحل هذه المشكلة يجب أولاً تعريف المتغيرات الأساسية التي تتضمنها هذه المشكلة والتعبير عنها في شكل رموز جبرية يمكن التعامل معها في نموذج البرمجة الخطية . وواضح أننا أمام مشكلة قرارية تتضمن متغيرين أساسيين هما :

$س_1$ تعبر عن الكمية الواجب إنتاجها من النوع الأول من لعب الأطفال .

$س_2$ تعبر عن الكمية الواجب إنتاجها من النوع الثاني من لعب الأطفال .

Scanned with CamScanner

يمكن حينئذ أن نبدأ مع التعامل مع هذه المتغيرات وهيكلتها فى الشكل أو النموذج المعروف لمشكلة البرمجة الخطية .

صياغة دالة الهدف :

واضح أن هذه المشكلة هدفها تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل نوع وبما يؤدى إلى تعظيم أرباح الشركة جدير بالذكر أن نعرف هنا أننا فى تعاملنا مع دالة هدف لتعظيم الربح يمكن أن تكون معاملات متغيرات هذه الدالة هى فائض المساهمة للوحدة وليس صافى الربح للوحدة . وأن تعظيم فائض المساهمة هو فى ذات الوقت تعظيم لصافى الربح . لذلك فإننا يمكن أن نحدد فائض مساهمة الوحدة للمتغيرات كالآتى :

فائض مساهمة الوحدة = سعر بيع الوحدة – التكلفة المتغيرة للوحدة

النوع الأول = ٧٠ – ٤٤ = ٢٦ جنيه

النوع الثانى = ٦٥ – ٤١ = ٢٤ جنيه

ولذلك فإن دالة الهدف يمكن هيكلتها كالآتى :

$$ف = ٢٦ س_{١} + ٢٤ س_{٢}$$

واضح أن هذه الدالة الهدفية يمكن زيادتها إلى مالانهاية إذا لم تكن هناك قيود تحد من الوصول بمتغيراتها إلى اللانهائية . وهنا تأتى المرحلة الثانية وهى صياغة القيود على دالة الهدف ، والتى يبسط معالمها الجدول الآتى :

	حاجة كل منتج من طاقة كل قسم		الطاقة المتاحة يوميـاً
	الأول	الثانى	
القسم الأول	٦	٥	٥٠
القسم الثانى	٤	٣	٤٠

وواضح من هذا الجدول أن هناك طاقة لكل قسم ولايمكن لأى منهما تجاوز

Scanned with CamScanner

هذا المستوى من الطاقة معبراً عنها بعدد الساعات ، وأن هذه الطاقة يمكن أن توزع ما بين النوع الأول من اللعب والنوع الثانى .

ويبين الجدول السابق أن الوحدة الواحدة من النوع الأول من اللعب تحتاج إلى ٦ ساعات من طاقة هذا القسم الأول ، فى حين أن الوحدة الواحدة من النوع الثانى تتطلب ٥ ساعات من طاقة هذا القسم . وبناءً عليه فلو أننا قمنا بضرب عدد الوحدات الممكن إنتاجها من كل نوع فى حاجة كل وحدة من الطاقة فسوف نحصل على الحاجة الكلية لكلا النوعين من اللعب من طاقة القسم . ويمكن ترجمة ذلك جبرياً كالآتى :

$$٦ س_١ + ٥ س_٢ \geq ٥٠$$

أى أن الساعات المخصصة لإنتاج النوع الأول بالإضافة إلى الساعات المخصصة لإنتاج النوع الثانى لايمكن بأى حال أن تتجاوز الطاقة المتاحة للقسم ، ولكن يمكن الوصول إلى هذا المستوى أو أقل منه . وبتطبيق نفس الإجراء على القسم الثانى .

$$٤ س_١ + ٣ س_٢ \geq ٤٠$$

فى هذه الحالة فنحن فى حاجة إلى نوع جديد من القيود التى تحد من ظاهرة إمكانية السالبية فى الحل . وهو الدور الذى تلعبه قيود عدم السالبية . والتى تظهر فى الشكل التالى :

$$س_١ \geq صفر$$

$$س_٢ \geq صفر$$

بعد هذه المرحلة من مراحل تشكيل المشكلة نكون قد وصلنا إلى الصورة النهائية للمشكلة هى :

المطلوب تعظيم قيمة ف حيث :

Scanned with CamScanner

ف = ٢٦ س$_{١}$ + ٢٤ س$_{٢}$ (أكبر ما يمكن)

أخذاً فى الأعتبار :

٦ س$_{١}$ + ٥ س$_{٢}$ ≥ ٥٠

٤ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ ≥ ٤٠

س$_{١}$ ≥ صفر

س$_{٢}$ ≥ صفر

٢ - مثال على تدنية التكاليف :

ترغب شركة هاجر شوقى لخدمات البريد فى الإستعانة بخدمات بعض الخريجين من حملة المؤهلات المتوسطة فى توزيع البريد . وقد طلبت منك السيدة هاجر بصفتك خبيراً فى التعامل مع أساليب بحوث العمليات خاصة نموذج البرمجة الخطية أن تقوم بمساعدتها فى إتخاذ القرار المناسب الذى سيترتب عليه تخفيض تكاليف الأجور إلى أدنى حد ممكن فى ضوء البيانات التالية :

(١) ترغب الشركة فى التعاقد مع ١٠ أشخاص من الجنسين بنين وبنات ولايجب أن يتعدى العدد الفعلى ذلك الوقت حيث القدرات المحدودة مالياً لدفع أجورهم .

(٢) تدفع الشركة ٢٥ جنيه يومياً لكل خريج وتدفع أيضاً ٢٢ جنيه لكل خريجة .

(٣) من واقع تعاملات الشركة مع مستخدمين سابقين فإن الخريج يستطيع توزيع ٣٠٠ خطاب و ٨٠ طرد يومياً . فى حين أن الخريجة تستطيع توزيع ٤٠٠ خطاب و ٥٠ طرد يومياً .

(٤) متوسط الخطابات المطلوب توزيعها يومياً ٣٤٠٠ خطاب فى حين أن متوسط الطرود اليومية ٦٨٠ طرد .

Scanned with CamScanner

الحـــل

دع أن :

$س_1$ تعبر عن عدد الخريجين المطلوب تعيينهم لخدمات البريد .

$س_2$ تعبر عن عدد الخريجات المطلوب تعيينهن لخدمات البريد .

وواضح أن إدارة الشركة ترغب فى التعاقد مع العدد الذى يجعل التكلفة أقل ما يمكن لذلك فإن دالة الهدف يمكن ترجمتها كالآتى :

$$ف = ٢٥ س_1 + ٢٢ س_2 \quad \text{(أقل ما يمكن)}$$

وتكون قيود المشكلة فى الصورة التالية :

قيد الخطابات الموزعة :

$$٣٠٠ س_1 + ٤٠٠ س_2 \leq ٣٤٠٠$$

قيد الطرود الموزعة :

$$٨٠ س_1 + ٥٠ س_2 \leq ٦٨٠$$

قيد عدد المعنيين من الجنسين :

$$س_1 + س_2 \geq ١٠$$

الصورة النهائية للمشكلة .

المطلوب تدنية قيمة ف حيث :

$$ف = ٢٥ س_1 + ٢٢ س_2 \quad \text{(أقل ما يمكن)}$$

أخذاً فى الحسبان :

$$٣٠٠ س_1 + ٤٠٠ س_2 \leq ٣٤٠٠$$

$$٨٠ س_1 + ٥٠ س_2 \leq ٦٨٠$$

$$س_1 + س_2 \geq ١٠$$

$$س_1 \geq صفر ، س_2 \geq صفر$$

Scanned with CamScanner

٣ - مثال على تخطيط المنتجات الصناعية

تقوم إحدى الشركات الصناعية بانتاج ثلاث منتجات من خلال ثلاث مراحل إنتاجية . وجدول (١) يوضح احتياجات كل وحدة (بالساعة) من كل منتج والطاقة المتاحة اليومية لكل مرحلة من المراحل الانتاجية الثلاثة (بالدقيقه فى اليوم) وكذلك عائد المساهمة لكل منتج (بالجنيه المصرى) كمايلى :

منتج	الوقت لكل وحدة منتج (ساعة)			الطاقة المتاحة (ساعة)
	منتج ١	منتج ٢	منتج ٣	
الأولى	١	٢	١	٤٥٠
الثانية	٣	-	٢	٤٨٠
الثالثة	٢	٧	-	٤٠٠
عائد المساهمة للوحدة (بالجنيه)	٣٠	٢٠	٥٠	

جدول(١)

الحل :

يلاحظ أن العناصر الأساسية فى النموذج الرياضى تتمثل فى :

(١) المتغيرات الأصلية (المتغيرات القرارية) .

(٢) دالة الهدف للمشكلة .

(٣) قيود المشكلة .

(١) المتغيرات الأصلية :

والمتغيرات فى هذه المشكلة (متغيرات القرار) تتمثل فى عدد الوحدات التى يمكن انتاجها من كل من المنتجات الثلاثة على النحو التالى :

Scanned with CamScanner

د ع :

$س_1$ = عدد الوحدات التى يمكن انتاجها من المنتج (١) .

$س_2$ = عدد الوحدات التى يمكن انتاجها من المنتج (٢) .

$س_3$ = عدد الوحدات التى يمكن انتاجها من المنتج (٣) .

(٢) دالة الهدف للمشكلة

إن إجمالى عائد المساهمة (ف) للمنتجات الثلاث يمكن الحصول عليه باستخدام المعادلة التالية :

$ف = ٣٠ س_1 + ٢٠ س_2 + ٥٠ س_3$ (أكبر ما يمكن)

(٣) قيود المشكلة :

أما القيود المتعلقة بهذه المشكلة فيجب أن تضمن أن وقت التشغيل المطلوب لكل الوحدات المنتجة يجب الا يزيد عن الطاقة اليومية المتاحة لكل مرحلة من المراحل الانتاجية الثلاث وطبقا لذلك ، فإنه يمكن التعبير عن هذه القيود بالمتباينات التالية :

قيد المرحلة الأولى $س_1 + ٢ س_2 + س_3 \leq ٤٥٠$

قيد المرحلة الثانية : $٣ س_2 + ٢ س_3 \leq ٤٨٠$

قيد المرحلة الثالثة : $٢ س_1 + ٧ س_3 \leq ٤٠٠$

وبسبب عدم ضرورة انتاج وحدات سالبة ، فإن هناك قيود إضافية يطلق عليه قيود عدم السلبية والتى بمقتضاها $س_1 \geq$ صفر ، $س_2 \geq$ صفر ، $س_3 \geq$ صفر .

Scanned with CamScanner

النموذج الرياضى للمشكلة :

والآن يمكن صياغة المشكلة المذكورة أعلاه فى شكل نموذج رياضى كالآتى :

تعظيم ف = ٢٠ س$_{١}$ + ٢٠ س$_{٢}$ + ٥٠ س$_{٣}$ (أكبر مايمكن)

بشرط أن :

س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ ٤٥٠

٣ س$_{٢}$ + ٢ س$_{٣}$ ≤ ٤٨٠

٢ س$_{١}$ + ٧ س$_{٣}$ ≤ ٤٠٠

س$_{١}$ ≥ صفر ، س$_{٢}$ ≥ صفر ، س$_{٣}$ ≥ صفر

والسؤال هنا : ماالذى يدفعنا الى القول بأنه يمكن استخدام نموذج البرمجة لحل المشكلة المذكورة أعلاه ؟ . بالنظر الى النموذج الرياضى للمشكلة نجد أنه مبني علي :

(١) **فرض التناسب** ، مثال ذلك فى دالة الهدف نجد أن مضاعفة الانتاج من س$_{١}$ مثلا سيؤدى الى مضاعفة عائد المساهمة الخاص بهذا المنتج ، وكذلك بالنسبة للقيود نجد مثلا أن مضاعفة حجم الانتاج من س$_{١}$ سيؤدى الى مضاعفة احتياجاتها من الطاقة الانتاجية فى كل مرحلة من المراحل الانتاجية الثلاثة .

(٢) **فرض الجمع فى دالة الهدف** ، نجد أن اجمالى عائد المساهمة (ف) يتم الحصول عليه عن طريق جمع عائد المساهمة الخاص بكل منتج من المنتجات الثلاثة ، أما فى القيود ، فنجد أن اجمالى الطاقة المستخدمة فى كل مرحلة يتم عن طريق اضافة أوجمع الطاقات المستخدمة للمنتجات الثلاثة التى تستفيد من هذه المرحلة الانتاجية .

Scanned with CamScanner

(٣) فرض التأكد :

نجد أن معلمات النموذج الممثلة فى عائد المساهمة للوحدة المنتجة ونصيب الوحدة المنتجة من كل مرحلة انتاجية ثابت ومعروف بغض النظر عن مستوى إنتاج كل منتج .

٤ - مثال على تخطيط المنتجات الزراعية :

ترغب إحدى الشركات الزراعية فى شراء وخلط واحد أو أكثر من ثلاثة أنواع من الأرز كل خليط أرز يحتوى على كميات مختلفة من أربعة عناصر غذائية . وجدول (٢) يوضح البيانات المتعلقة بهذه المشكلة .

العنصر	وزن الكيلو جرام من			الكميات المطلوبة على الأكثر خلال الفترة
	أرز ١٠٢	أرز ١٠٥	أرز ١١٧	
العنصر أ	٢	٣	٥	١٢٥٠
العنصر ب	١	١	–	٤٠
العنصر جـ	٥	٣	–	٩٠٠
العنصر د	٢	٣	٤	٥٠
التكلفة لكل كيلو جرام (بالجنيه المصرى)	٥٠	٣٥	٨٠	

جدول(٢)

ويرغب مدير الانتاج فى تحديد الكميات التى يجب شراؤها من الأنواع الثلاثة من الأرز والتى تتوافر فيها الشروط الغذائية المحددة .

المطلوب : تحضير المشكلة بغرض تحديد أقل تكلفة ممكنة .

Scanned with CamScanner

الحل :

(١) تحديد المتغيرات الأصلية :

إفترض أن :

$س_1$ = عدد الكيلو جرامات التى يمكن شراؤها من أرز ١٠٢ .

$س_2$ = عدد الكيلو جرامات التى يمكن شراؤها من أرز ١٠٥ .

$س_3$ = عدد الكيلو جرامات التى يمكن شراؤها من أرز ١١٧ .

(٢) دالة هدف المشكلة :

$ف = ٥٠ س_1 + ٣٥ س_2 + ٨٠ س_3$ (أقل ما يمكن)

(٣) صياغة قيود المشكلة :

العنصر أ : $٢س_1 + ٣ س_2 + ٥ س_3 \geq ١٢٥٠$

العنصر ب : $س_1 + س_2 \geq ٤٠$

العنصر جـ : $٥ س_1 + ٣ س_3 \geq ٩٠٠$

العنصر د : $٢ س_1 + ٣ س_2 + ٤س_3 \geq ٥٠$

(٤) قيود عدم السلبية :

$س_1 \geq$ صفر ، $س_2 \geq$ صفر ، $س_3 \geq$ صفر

النموذج الرياضى للمشكلة :

تخفيض $ف = ٥٠ س_1 + ٣٥ س_2 + ٨٠ س_3$ (أقل ما يمكن)

بشرط أن :

$٢ س_1 + ٣ س_2 + ٥ س_3 \geq ١٢٥٠$

$س_1 + س_3 \geq ٤٠$

$٥ س_1 + ٣ س_3 \geq ٩٠٠$

$٢ س_1 + ٣ س_2 + ٤ س_3 \geq ٥٠$

$س_1 \geq$ صفر ، $س_2 \geq$ صفر ، $س_3 \geq$ صفر

Scanned with CamScanner

٥ - مثال على المراحل الصناعية لأحدى المنتجات

ترغب شركة عبدالعزيز الحربى الصناعية فى إنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات وكل منتج يمر على ثلاثة مراحل إنتاجية هى التقطيع والتجميع والدهان . والجدول التالى يوضح البيانات الوصفية لهذه المشكلة

المنتج	المراحل الانتاجية			سعر بيع الوحدة (بالجنيه)	التكلفة المتغيرة للوحدة(بالجنيه)
	التقطيع	التجميع	الدهان		
الأول	١	٢	٤	١٠	٤
الثانى	٣	٣	٢	٦	٣
الثالث	١	٣	١	٥	٣
الطاقة المتاحة (بالساعات)	٤٥	٥	٦٠		

المطلوب : تحضير هذه المشكلة التى تعظم أقصى أرباح ممكنة للشركة

الحل :

(١) تحديد المتغيرات القرارية (الأصلية) :

افترض أن

$س_{١}$ = عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول .

$س_{٢}$ = عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثانى .

$س_{٣}$ = عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثالث .

(٢) دالة الهدف :

يجب القيام بحساب عائد المساهمة لكل وحدة من كل منتج أظ لعدم

Scanned with CamScanner

توافر هذه المعلومة بشكل مباشر فى المشكلة ، وعائد المساهمة عبارة عن الفرق بين سعر بيع الوحدة والتكلفة المتغيرة المتعلقة بهذه الوحدة والجدول التالى يوضح كيفية الحصول على عائد المساهمة للوحدة من كل من المنتجات الثلاثة .

المنتج	سعر البيع للوحدة (١)	التكلفة المتغيرة للوحدة(٢)	عائد المساهمة للوحدة (١)-(٢)
الأول	١٠	٤	١٠ - ٤ = ٦
الثانى	٦	٣	٦ - ٣ = ٣
الثالث	٥	٣	٥ - ٣ = ٢

ومن ثم فإنه يمكن كتابة دالة الهدف كمايلى :

ف = ٦ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ + ٢ س$_{٣}$ (أكبر ما يمكن)

(٣) صياغة قيود المشكلة :

والقيود هنا متعلقة بالطاقة الانتاجية المتاحة (الموارد المحدودة) لكل مرحلةمن المراحل الانتاجية الثلاثة . وطبقاً للمعلومات المعطاة فإنه يمكن تمثيل هذه القيود بالمتباينات التالية :

مرحلة التقطيع : س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ ٤٥

مرحلة التجميع : ٤ س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ ٥٠

مرحلة الدهان : ٢ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ + ٣ س$_{٣}$ ≤ ٦٠

(٤) قيود عدم السلبية :

س$_{١}$ ≥ صفر ، س$_{٢}$ ≥ صفر ، س$_{٣}$ ≥ صفر

Scanned with CamScanner

النموذج الرياضى للمشكلة (الصورة النهائية للمشكلة) :

تعظيم ف = ٦ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ + ٢ س$_{٣}$ (أكبر مايمكن)

بشرط أن :

س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ ٤٥

٢س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ + ٣ س$_{٣}$ ≤ ٥٠

٤ س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ ٦٠

س$_{١}$ ≥ صفر ، س$_{٢}$ ≥ صفر ، س$_{٣}$ ≥ صفر

٦ - مثال على تخطيط الحاصلات الزراعية .

تمتلك شركة هبة شوقى لتصنيع الطماطم ٥٠٠٠ كيلو جرام من النوع أ و ١٠٠٠٠ كيلو جرام من النوع ب . وتستخدم هذه الطماطم فى تصنيع عصير وعجينة الطماطم . وعصير الطماطم يجب أن يتكون على الأقل من ٨٠٪ من النوع أ ، أما عجينة الطماطم فيجب أن تكون على الأقل من ١٠٪ من النوع أ . ويبلغ سعر بيع عصير الطماطم ١٥ جنيها للكيلو وسعر بيع عجينة الطماطم ١٢ جنيها للكيلو جرام .

المطلوب : تحضير المشكلة ليعظم أقصى أرباح ممكن .

الحل :

(١) تحديد متغيرات المشكلة :

- ع أن :

س$_{١}$ = عدد الكيلو جرامات من النوع أ التى تستخدم فى صناعة عصير الطماطم .

س$_{٢}$ = عدد الكيلو جرامات من النوع ب التى تستخدم فى صناعة عصير الطماطم .

Scanned with CamScanner

$س_٣$ = عدد الكيلو جرامات من النوع أ التى تستخدم فى صناعة عجينة الطماطم .

$س_٤$ = عدد الكيلو جرامات من النوع ب التى تستخدم فى صناعة عجينة الطماطم .

(٢) تحديد قيود المشكلة :

- حيث أنه يوجد لدى الشركة ٥٠٠٠ كيلو من النوع أ من الطماطم ، فإنه يمكن كتابة القيد التالى :

$$س_١ + س_٣ \leq ٥٠٠٠$$

- أيضا تمتلك الشركة ١٠٠٠٠ كيلو جرام من النوع ب من الطماطم ، ومن ثم فإنه يمكن صياغة القيد التالى :

$$س_٣ + س_٤ \leq ١٠٠٠٠$$

- عصير الطماطم يجب أن يتكون على الأقل من ٨٠٪ من النوع أ ، وحيث أن الكمية الكلية المتاحة التى يمكن أن تستخدم فى تصنيع عصير الطماطم من النوع أ . والنوع ب هى $(س_١ + س_٢)$ ، فإنه يمكن صياغة القيد كمايلى :

$$\frac{س_١}{س_١ + س_٢} \leq ٨ر \quad \text{أو}$$

$$س_١ \leq ٨ر س_١ + ٨ر س_٢ \quad \text{أو}$$

$$س_١ - ٨ر س_١ - ٨ر س_٢ \leq \text{صفر} \quad \text{أو}$$

$$٢ر س_١ - ٨ر س_٢ \leq \text{صفر}$$

- عجينة الطماطم يجب أن تتكون على الأقل من ١٠٪ من النوع الأول . وحيث أن الكمية المتاحة من النوع أ ومن النوع ب من الطماطم والتى يمكن

استخدامها فى تصنيع عجينة الطماطم هى (س ٣ + س ٤) ، فإنه يمكن صياغة القيد كمايلى :

$$\frac{س_3}{س_2 + س_4} \leq ١٠ر \quad \text{أو}$$

س ٣ ≤ ١٠ر س ٣ + ١٠ر س ٢ أو

س ٣ − ١٠ ر س ٣ − ١٠ر س ٤ ≤ صفر أو

٩ ر س ٣ − ١٠ ر س ٤ ≤ صفر

(٣) صياغة دالة الهدف :

وطبقا للقيود المذكورة أعلاه ، فإن الشركة ترغب فى تعظيم عائد المساهمة الناتج من بيع منتجاتها من عصير وعجينة الطماطم . وعلى ذلك فإن معادلة الربحية تكون كمايلى:

تعظيم ف = ١٥ (س ١ + س ٢) + ١٢ (س ٣ + س ٤)

= ١٥ س ١ + ١٥ س ٢ + ١٢ س ٣ + ١٢ س ٤ (أكبر ما يمكن)

(٤) الصورة النهائية للنموذج الرياضى لمشكلة البرمجة الخطية

تعظيم ف = ١٥ س ١ + ١٥ س ٢ + ١٢ س ٣ + ١٢ س ٤ (أكبر مايمكن)

بشرط أن :

٢ر٠ س ١ − ٨ر س ٢ ≤ صفر

٩ر س ٣ − ١٠ر س ٤ ≤ صفر

س ١ ≤ صفر ، س ٣ ≤ صفر ، س ٤ ≤ صفر

Scanned with CamScanner

المبحث الثالث

الطريقة الجبرية (طريقة السمبلكس) لمشكلة البرمجة الخطية

Simplex Method of Linear Programming Model

ومما لاشك فيه أن طريقة السمبلكس The Simplex Method تعتبر أكفأ الأساليب الموجودة حالياً لحل مشكلة البرمجة الخطية ، بل وأكثر من ذلك فهى أكثر الطرق شيوعاً لحل البرنامج الخطى بطريقة جبرية . وتتميز هذه الطريقة بسهولتها وإمكانية تطبيقها فى الحياة العملية فى مجالات عديدة ومتنوعة . ولتجهيز المشكلة الأصلية للحل يلزم أولا اعداد المشكلة المعدلة (أى نقوم بتحويل المشكلة الأصلية إلى مشكلة أخرى معدلة) وذلك عن طريق مايلى :

(١) تحويل المتباينات Inequelities إلى معادلات Equlities رياضية وذلك بعد إضافة المتغيرات المناسبة . وسوف نقدم عرضاً مبسطاً لنوعيه متغيرات مشكلة البرمجة الخطية فيمابعد .

(٢) يبدأ الحل فى طريقة السمبلكس بتكوين التابلوهات حتى نصل إلى آخر تابلوه يمثل الحل النهائى (الحل الأمثل) لنموذج البرنامج الخطى ، وبتكوين التابلوه الأول Tableau نصل إلى الحد المبدئى Initial ويسمى الحل المبدئى عادة "بالحل الصفرى" وفيه يفترض أن برنامج الإنتاج الأمثل للمنتجات = صفر وحدة ، وقيمة دالة الهدف = صفر جنيه .

١/٣/٢. أهم المتغيرات لنموذج البرمجة الخطية :

مما لاشك فيه عند تحويل مشكلة النموذج الخطى (نموذج البرمجة الخطية) من المشكلة الأصلية (فى شكل متباينات) إلى المشكلة المعدلة (فى شكل معادلات رياضية) يلزمنا الأمر إلى حاجة ماسة لوجود متغيرات مختلفة لنموذج البرمجة الخطى ، ألا وهى :

Scanned with CamScanner

(أ) المتغيرات القرارية : Decision Variables وهى المتغيرات التى تتعلق بهيكل المشكلة الأصلية موضوع البحث والدراسة للنموذج الخطى وقد يطلق عليها بالمتغيرات الأصلية للمشكلة (المتغيرات الهيكلية) .

(ب) متغيرات القصور : Slack Variables وهى المتغيرات التى تقيس مدى القصور الموجود فى الطرف الأيمن للمتباينة عن بلوغ الطرف الأيسر ، وخاصة تكون فى صياغة قيود المشكلة . فمثلاً إذا كان لدينا قيد على النحو التالى ($س_1 + ٣ س_2 \geq ٥٠٠$) ، فيتم تحويله إلى شكل معادلة بعد إضافة متغير جديد (متغير القصور) إلى المتباينة السابقة لتأخذ الشكل التالى فى صورة معادلة رياضية ($س_1 + ٣ س_2 + س_3 = ٥٠٠$) .

(جـ) متغيرات الفائض : وهى المتغيرات التى تمثل مقدار الفائض الموجود فى الطرف الأيمن على الطرف الأيسر ، فمثلاً إذا كان لدينا قيد على الشكل التالى ($٢س_1 + ٤س_2 \leq ٤٧٠$ ، فيتم تحويل المتباينة إلى معادلة رياضية عن طريق إضافة متغيرين هما (متغير فائض + متغير وهى) ويكون بالشكل التالى :

($٢س_1 + ٤س_2 - س_3 + س_4 = ٤٧٠$)

(د) متغيرات وهمية : ويطلق عليها وهمية لأنه لا علاقة بها بالمشكلة الأصلية ولايمكن ربطها بشئ حسى يمت إلى طبيعة المشكلة بصلة . فهى متغيرات تلعب دوراً محدداً فى عملية حل المشكلة وبمجرد أدائها لهذا الدور يتم التخلص منها مباشرة . فمثلاً إذا كان لدينا القيد التالى ($س_1 + ٤س_2 = ٤٠٠$) فلابد من تحويله إلى معادلة رياضية على النحو التالى بعد إضافة متغير جديد (متغير وهمى) Artifical Variable ولتكن المعادلة ($س_1 + ٤س_2 + س_3 = ٤٠٠$) .

ومن هنا يمكن القول بأن نوع المتغيرات (ب ، جـ ، د) يطلق عليها بالمتغيرات

Scanned with CamScanner

(أ) المتغيرات القرارية : Decision Variables وهى المتغيرات التى تتعلق بهيكل المشكلة الأصلية موضوع البحث والدراسة للنموذج الخطى وقد يطلق عليها بالمتغيرات الأصلية للمشكلة (المتغيرات الهيكلية) .

(ب) متغيرات القصور : Slack Variables وهى المتغيرات التى تقيس مدى القصور الموجود فى الطرف الأيمن للمتباينة عن بلوغ الطرف الأيسر ، وخاصة تكون فى صياغة قيود المشكلة . فمثلاً إذا كان لدينا قيد على النحو التالى ($س_1 + ٣ س_2 \geq ٥٠٠$) ، فيتم تحويله إلى شكل معادلة بعد إضافة متغير جديد (متغير القصور) إلى المتباينة السابقة لتأخذ الشكل التالى فى صورة معادلة رياضية ($س_1 + ٣ س_2 + س_3 = ٥٠٠$) .

(جـ) متغيرات الفائض : وهى المتغيرات التى تمثل مقدار الفائض الموجود فى الطرف الأيمن على الطرف الأيسر ، فمثلاً إذا كان لدينا قيد على الشكل التالى ($٢س_1 + ٤س_2 \leq ٤٧٠$) ، فيتم تحويل المتباينة إلى معادلة رياضية عن طريق إضافة متغيرين هما (متغير فائض + متغير وهى) ويكون بالشكل التالى :

($٢س_1 + ٤س_2 - س_3 + س_4 = ٤٧٠$)

(د) متغيرات وهمية : ويطلق عليها وهمية لأنه لا علاقة بها بالمشكلة الأصلية ولايمكن ربطها بشئ حسى يمت إلى طبيعة المشكلة بصلة . فهى متغيرات تلعب دوراً محدداً فى عملية حل المشكلة وبمجرد أدائها لهذا الدور يتم التخلص منها مباشرة . فمثلاً إذا كان لدينا القيد التالى ($س_1 + ٤س_2 = ٤٠٠$) فلابد من تحويله إلى معادلة رياضية على النحو التالى بعد إضافة متغير جديد (متغير وهمى) Artifical Variable ولتكن المعادلة ($س_1 + ٤س_2 + س_3 = ٤٠٠$) .

ومن هنا يمكن القول بأن نوع المتغيرات (ب ، جـ ، د) يطلق عليها بالمتغيرات

Scanned with CamScanner

الإضافية لمشكلة البرمجة الخطية ، بينما النوع (أ) من المتغيرات يطلق عليه بالمتغيرات الأصلية أو الهيكلية (المتغيرات القرارية) .

٢/٣/٢ مثال توضيحى : لبيان طريقة السمبلكس فى تحديد تشكيلة المنتجات (تحديد برنامج الإنتاج الأمثل ونتائجه المالية) .

قامت شركة عبدالقادر المهيدب وأولاده باعداد الميزانية التقديرية للإنتاج كخطوة أساسية لأعداد الميزانية التقديرية الشاملة . وتم تجميع البيانات التالية عن طريق الإدارة العامة .

المنتج	عدد الساعات المطلوبة لإنتاج الوحدة			سعر بيع الوحدة (جنيه)	تكلفة متغيرة للوحدة (جنيه)	فائض المساهمة للوحدة (جنيه)
	قسم ١	قسم ٢	قسم ٣			
س	١	٣	٢	٣٦	٣٠	٦
ص	٢	٤	٦	٥٥	٤٨	٧
ع	١	٢	٤	١٨	١٠	٨
الطاقة المتاحة	١٠٠٠٠	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠			

وترغب إدارة الشركة فى تحديد برنامج الإنتاج الأمثل للفترة القادمة والذى يترتب عليه تحقيق أقصى أرباح ممكنة . فإذا علمت أن التكاليف الثابتة خلال الفترة ذاتها قدرتها بمبلغ وقدره ٢٥٠٠٠ جنيه .

والمطلوب :

(١) تحديد برنامج الإنتاج الأمثل للشركة .

(٢) تحديد صافى الربح المترتب على هذا البرنامج .

(٣) فسر أسعار الظل Shadow prices المترتب على هذا البرنامج مع التعليق على خواصها بإيجاز شديد .

Scanned with CamScanner

الحل

* تحضير (تكوين) المشكلة الأصلية :

(١) التعبير عن مستوى الإنتاج فى صورة رموز جبرية :

دع :

$س_{١}$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (س) .

$س_{٢}$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (ص) .

$س_{٣}$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (ع) .

(٢) صياغة دالة الهدف (معيار الأفضلية) :

دع أن :

ف = فائض المساهمة الكلى للشركة ، فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على الصورة التالية :

$ف = ٦س_{١} + ٧س_{٢} + ٨س_{٣}$ (أكبر ما يمكن)

(٣) صياغة قيود المشكلة :

يوجد ثلاث قيود بالنسبة لهذه المشكلة ، حيث كل قسم يمثل قيد يكون الطرف الأيسر له مقدار الطاقة المتاحة "بالساعة" .

$س_{١} + ٢س_{٢} + س_{٣} \leq ١٠٠٠$

$٣س_{١} + ٤س_{٢} + ٢س_{٣} \leq ١٢٠٠$

$٢س_{١} + ٦س_{٢} + ٤س_{٣} \leq ٢٠٠٠$

(٤) صياغة قيد عدم السالبية :

$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} \geq$ صفر

* الصورة النهائية للمشكلة المعدلة تكون على النحو التالى :

أوجد قيمة كلا من ($س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، ..... ، س_{٦}$) التى تجعل (ف) أكبر ما يمكن .

Scanned with CamScanner

ف = ٦ س$_{١}$ + ٧س$_{٢}$ + ٨س$_{٣}$ + (صفر) س$_{٤}$ + (صفر) س$_{٥}$ + (صفر) س$_{٦}$

أخذاً فى الإعتبار مايلى :

- س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + س$_{٣}$ + س$_{٤}$ ≤ ١٠٠٠٠
- ٣س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ + ٢س$_{٣}$ + س$_{٥}$ = ١٢٠٠٠
- ٢س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ + ٤س$_{٣}$ + س$_{٦}$ = ٢٠٠٠٠

س$_{١}$ ، ٢س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ..... ، ..... ، س$_{٦}$ ≥ صفر

• خطوات حل المشكلة بإستخدام طريقة السمبلكس :

(١) تحديد الحل المبدئى : Initial Besic feasible Solution والذى يمثل حل مبدئى ممكن نتخذه نقطة للإرتكاز والقفز منه إلى حلول أ[illegible] أفضل .

وهكذا فإن التابلوه الأول سوف يبدو على الشكل التالى :

معادلات دالة الهدف / متغيرات المشكلة		٦ س$_{١}$	٧ س$_{٢}$	٨ س$_{٣}$	صفر س$_{٦}$	صفر س$_{٦}$	صفر س$_{٦}$	مقابل الطرف الأيسر
صفر	س$_{٤}$	١	٢	١	١	صفر	صفر	١٠٠٠٠
صفر	س$_{٥}$	٣	٤	٢	صفر	١	صفر	١٢٠٠٠
صفر	س$_{٦}$	٢	٦	٤	صفر	صفر	١	٢٠٠٠٠
صف إختيار مثالية الحل		(-٦)	(-٧)	(-٨)	صفر	صفر	صفر	صفر

ويتمثل الحل المبدئى من هذا التابلوه على النحو التالى :

س$_{١}$ = صفر وحدة من المنتج (س) .

س$_{٢}$ = صفر وحدة من المنتج (ص) .

س$_{٣}$ = صفر وحدة من المنتج (ع) .

س$_{٤}$ = ١٠٠٠٠ ساعة .

س$_{٥}$ = ١٢٠٠٠ ساعة ← تمثل الطاقة المتاحة لم تستغل بالكامل

س$_{٦}$ = ٢٠٠٠٠ ساعة .

Scanned with CamScanner

ف (الفائض المساهمة الكلى للشركة) = صفر حيث .

(٣) إختبار مثالية الحل Testing for Optimality

عندما نصل له ... ختبار مثالية الحل فى التالوه السابو ... نجد أن جميع القيم التى تسفر المتغيرات القرارية (الأصلية) للمشكلة تساوى قيم مساهمة فهذا يعنى أنه يمكن تحسين قيمة دالة الهدف ، وبالتالى نبدأ فى تحديد المتغير المرشح للدخول (ويكون متغير من المتغيرات الأصلية فى المشكلة) ويحل محل متغير من المتغيرات الإضافية (سواء كان متغير قصور أو متغير فائض) ويكون ذلك بناء على معيار أفضلية معين .

(٣) تحديد المتغير المرشح للدخول : Candidate Vector to Enter The Basis

يجب علينا أن نتحرك حول حل جديد فلابد من إدخال أحد المتغيرات (س١ ، س٢ ، س٣) إلى الحل لأن جميع القيم فى صف إختبار المثالية فى التالوه الأول قيم سالبة (الأمر الذى يعنى إدخال أى منهما يؤدى إلى تحسين قيمة دالة الهدف) وفى هذه الحالة فإن (س٣) هو المتغير المرشح للدخول لأن القيمة المقابلة له فى صف إختبار مثالية الحل = (-٨) ، وهى التى تمثل أكبر قيمة جبرية .

(٤) تحديد المتغير المرشح للخروج : Candidate Vector to Leave the Basis

يكون منفذنا فى هذه الخطوة تحديد المتغير المرشح للخروج من الأساس . وكنا رشحنا المتغير (س٣) الذى يحمل عناصر العمود

$$\begin{Bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٤ \end{Bmatrix}$$

ويكون أمامه مقادير الطرف الأيسر التالية

$$\begin{Bmatrix} ١٠٠٠ \\ ١٢٠٠٠ \\ ٢٠٠٠ \end{Bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

ونحاول إيجاد خوارج القسمة للعمودين فيكون الناتج فى صورة عمود بالشكل التالى :

$$\begin{Bmatrix} ١٠٠٠٠ \\ ٦٠٠٠ \\ ٥٠٠٠ \end{Bmatrix}$$

ومن هنا نختار أقل خارج قسمة لمقادير الطرف الأيسر ، وبالتالى يكون المتغير المرشح للخروج هو ($س_٦$) وتكون عناصر الحل الجديد مكون من المتغيرات ($س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٦$) .

(٥) تحديد القطب أو المفتاح أو الرقم الأساسى The Piovt Element

القطب أو المفتاح أو الرقم الأساسى يكون الرقم الذى يقع عند تقاطع عمود المتغير المرشح للدخول فى صف المتغير المرشح للخروج . ويسمى الصف الذى يقع فيه هذا الرقم الأساسى بالصف الأساسى أيضاً . وبالتالى يكون القطب (المفتاح) = العنصر رقم (٤) .

(٦) تحديد عناصر الصف الأساسى فى التابلوه الجديد :

يمكن تحديد عناصر الصف الأساسى فى التابلوه الجديد عن طريق المعادلة الآتيه :

(أ) عناصر الصف الأساسى فى التابلوه الجديد = $\frac{\text{قيم عناصر الصف الأساس فى التابلوه القديم}}{\text{القطب (المفتاح)}}$

(ب) ∴ عناصر الصف الأساسى فى التابلوه الجديد تكون على النحو التالى :

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، صفر ، صفر ، $\frac{١}{٤}$ ، ٥٠٠٠)

(٧) إستكمال باقى عناصر التابلوه الجديد :

لكى نستكمل باقى عناصر التابلوه الجديد فإنه يلزمنا حساب القيم الجديد لعناصر الصفين الأول والثانى عن طريق المعادلة التالية :

∴ عناصر الصف الجديد =

Scanned with CamScanner

عنصر الصف القديم - (العنصر الواقع عند تقاطع هذا الصف مع عمود المتغير المرشح للدخول × عنصر الصف الأساسى الجديد المقابل لعنصر الصف القديم) .

(أ) حساب عناصر الصف الأول فى التابلوه الثانى الجديد :

١ - (١ × $^{١}/_{٢}$) = $^{١}/_{٢}$

٢ - (١ × $^{٣}/_{٢}$) = $^{١}/_{٢}$

١ - (١ × ١) = صفر

١ - (١ × صفر) = ١

صفر - (١ × صفر) = صفر

صفر - (١ × $^{١}/_{٤}$) = - $^{١}/_{٤}$

١٠٠٠٠ - (١ × ٥٠٠٠) = ٥٠٠٠

(ب) حساب عناصر الصف الثانى فى التابلوه الثانى (الجديد) :

٣ - (٢ × $^{١}/_{٢}$) = ٢

٤ - (٢ × $^{٢}/_{٣}$) = ١

٢ - (٢ × ١) = صفر

صفر - (٢ × صفر) = صفر

١ - (٢ × صفر) = ١

صفر - (٢ × $^{١}/_{٤}$) = - $^{١}/_{٢}$

١٢٠٠٠ - (٢ × ٥٠٠٠) = ٢٠٠٠

Scanned with CamScanner

وهكذا فيكون التابلوه الثانى ويتضمن عناصر الانتقال إلى حل جديد يبدو على الصورة التالية :

معادلات دالة الهدف / متغيرات المشكلة		٦ / س١	٧ / س٢	٨ / س٣	صفر / س٦	صفر / س٦	صفر / س٦	مقابل الطرف الأيسر	خوارج القسمة
صفر	س٤	١/٢	١/٢	صفر	١	صفر	-١/٤	٥٠٠٠	١٠,٠٠٠
صفر	س٥	(٢)	١	صفر	صفر	١	-١/٢	٢٠٠٠	١٠٠٠*
٨	س٣	١/٢	٣/٢	١	صفر	صفر	١/٤	٥٠٠٠	١٠,٠٠٠
صف إختيار مثالية الحل		(-٢)	(٥)	(صفر)	صفر	صفر	٢	٤٠٠٠٠	

ويتضح لنا من هذا التابلوه أن الحل الجديد هو :

س١ = صفر وحدة من المنتج (س) .

س٢ = صفر وحدة من المنتج (ص) .

س٣ = ٥٠٠٠ وحدة من المنتج (ع) .

س٤ = ٥٠٠٠ ساعة .

س٥ = ٢٠٠٠ ساعة . وتمثل عدد الساعات الغير المستغلة بالقسم (١) .

س٦ = صفر ساعة . وتمثل عدد الساعات الغير المستغلة بالقسم (٢) .

ف (فائض المساهمة الكلى) للشركة = ٤٠٠٠٠ جنيه .

(٨) عودة للخطوة الثانية (صف إختبار مثالية الحل) :

يتطلب فى هذه الخطوة تكرار الخطوات السابقة إبتداء من تحديد المتغير المرشح للدخول ، ثم المتغير المرشح للخروج ، ثم تحديد القطب أو الرقم الأساسى ، ثم تحديد عناصر الصف الأساسى فى التابلوه الجديد (التابلوه الجديد) لحل المشكلة . ومن هنا نصل إلى شكل التابلوه الثالث على النحو التالى :

Scanned with CamScanner

معادلات دالة الهدف / متغيرات المشكلة	٦ / س١	٧ / س٢	٨ / س٣	صفر / س٤	صفر / س٥	صفر / س٦	مقابل الطرف الأيسر
صفر س٤	صفر	١/٤	صفر	١	١/٤	-١/٨	٤٥٠٠
٦ س١	١	١/٢	صفر	صفر	١/٢	-١/٤	١٠٠٠
٨ س٣	صفر	٤/٥	١	صفر	-١/٤	٣/٨	٤٥٠٠
صف إختبار مثالية الحل	صفر	٦	(صفر)	صفر	١	٣/٢	٤٢٠٠٠

ويتضح لنا من التابلوه الثالث والأخير بأن جميع عناصر صف إختبار مثالية الحل من القيم السالبة . وهذا يعنى أننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل .

ويكون الحل الأمثل لبرنامج الإنتاج للشركة على النحو التالى :

(١) برنامج الإنتاج الأمثل للشركة على النحو التالى :

س١ = ١٠٠٠ وحدة من المنتج (س) .

س٢ = صفر وحدة من المنتج (ص) .

س٣ = ٤٥٠٠ وحدة من المنتج (ع) .

س٤ = ٤٥٠٠ ساعة . وهذه تمثل عدد الساعات غير المستغلة بالقسم (١) .

س٥ = صفر ساعة .
س٦ = صفر ساعة ← وتمثل عدم وجود ساعات عاطلة

ف = ٤٢٠٠٠ جنيه (وهى تمثل فائض المساهمة الكلى) للشركة .

(٢) صافى أرباح الشركة = فائض المساهمة الكلى – التكاليف الثابتة

= ٤٢٠٠٠ – ٢٥٠٠٠

= ١٧٠٠٠ جنيه

(٣) تحديد أسعار الظل Shadow Prices التى تترتب على هذا البرنامج هى (صفر ، ١ ، ٢ ، ٣/٢) . وقد يطلق عليها باسم تكلفة الفرصة البديلة (المضاعة)

Scanned with CamScanner

أو الأسعار المحاسبية . وهذه القيم ليست قيمة سوقية تحددت بفعل قوى السوق - أيا كانت طبيعة أو تركيب هذه القوى - إنما هى قيم محتسبة تحدد مدى مساهمة الوحدة الواحدة من عناصر الإنتاج الثابتة فى تحقيق الفائض ، وكذلك تحديد مدى المساهمة الإجمالية لكل عنصر من هذه العناصر فى تحقيق الفائض للشركة ، وهو فى نفس الوقت يمثل تكلفة الفرصة البديلة (المضاعة) .

٢/٣/٢. تعليق على خواص أسعار الظل Shadow Prices فى المثال السابق :

سوف نتناول بعض خواص أسعار الظل على سبيل المثال لا الحصر وهى :

أولاً : الخاصية التجميعية :

لدينا ثلاث قيم تمثل أسعار الظل فى المثال السابق وهى (صفر ، ١ ، ٣/٢) وأن كل واحدة منها تقابل قيد من القيود الثلاثة فى المشكلة على الترتيب ، فعندما نقوم بضرب قيم أسعار الظل فى مقادير الطرف الأيسر يكون الناتج يساوى فائض المساهمة الكلى للشركة والذى يرمز له بالرمز (ف) على النحو التالى :

$$= (\text{صفر} \times ١٠٠٠٠) + (١ \times ١٢٠٠٠) + (٣/٢ + ٢٠٠٠٠)$$

$$= \text{صفر} + ١٢٠٠٠ + ٣٠٠٠٠$$

$$= ٤٢٠٠٠ \text{ جنيه}$$

ثانياً : الخاصية التحليلية :

لدينا ثلاث قيم لأسعار الظل هى (صفر ، ١ ، ٣/٢) ، فإذا قمنا بضرب كل سعر ظل فى القيمة المقابلة له فى مقادير الطرف الأيسر فى القيود ، فإن هذا يمثل مدى مساهمة كل عنصر من العناصر المتعلقة بالمشكلة فى الوصول إلى القيمة المثلى لدالة الهدف ، ويمكن القول بأن حواصل الضرب فقط دون الإضافة لها خاصية تحليلية إذ أنها تجزئ قيمة دالة الهدف بين العناصر الثلاثة على النحو التالى :

Scanned with CamScanner

∴ مساهمة العنصر الأول فى القيمة المثلى لدالة الهدف

= صفر × ١٠٠٠٠ = صفر جنيه

∴ مساهمة العنصر الثانى فى القيمة المثلى لدالة الهدف

= ١ × ١٢٠٠٠ = ١٢٠٠٠ جنيه

∴ مساهمة العنصر الثالث فى القيمة المثلى لدالة الهدف

= $٣/٢$ × ٢٠٠٠٠ = ٣٠٠٠٠ جنيه

ثالثاً : الخاصية التجنيسية :

لدينا ثلاث قيم لأسعار الظل هى (صفر ، ١٠ ، $٣/٢٠$) ، ويكون السؤال هنا ما نوع التمييز الذى يمكن أن يصاحب هذه القيم ؟ هل هى جنيهات ، أما ساعات ، أم وحدات ، ..... إلخ . ويكون الرد على هذا السؤال بأن التمييز أو الصفة التى يمكن أن تطلق على هذه القيم هى نفس جنس التمييز أو الصفة التى يطلق على دالة الهدف .

∴ قيمة أسعار الظل (صفر ، ١٠ ، $٣/٢٠$) تأخذ تمييز أو صفة دالة الهدف بالجنيهات .

رابعاً : خاصية التقويم الإقتصادى لأوجه النشاط :

لكى يمكن أن نبرز هذه الخاصية لابد من عقد مقارنة بين عاملين هما :

(أ) فائض المساهمة للوحدة .

(ب) مجموع التكلفة الإقتصادية للوحدة بما تستهلكه هذه الوحدة من كل نوع من الطاقات . ونوضح ذلك فى الجدول التالى :

المنتج / بيانات	س	ص	ع
فائض المساهمة	٦	٧	٨
التكلفة الإقتصادية للسم (١)	صفر × ١ = صفر	صفر × ٢ = صفر	صفر × ١ = صفر
للسم (٢)	١ × ٣ = ٣	١ × ٤ = ٤	١ × ٢ = ٢
للسم (٣)	$٣/٢$ × ٢ = ٣	$٣/٢$ × ٦ = ٩	$٣/٢$ × ٤ = ٦
	٦	١٣	٨

Scanned with CamScanner

ملاحظات على الجدول السابق :

(١) بالنسبة للمنتج (س) نلاحظ تساوى فائض المساهمة للوحدة مع التكلفة الإقتصادية للوحدة الواحدة = ٦ جنيه . ومن هنا نجد أن نموذج البرمجة الخطية رشح لنا المنتج (س) ضمن برنامج الإنتاج الأمثل للشركة .

(٢) بالنسبة للمنتج (ص) نلاحظ أن فائض المساهمة للوحدة = ٧ جنيه ، بينما التكلفة الإقتصادية للوحدة من هذا المنتج = ١٣ جنيه . ومن هنا نجد أن النموذج رفض ترشيح هذا المنتج ضمن برنامج الإنتاج الأمثل للشركة .

(٣) بالنسبة للمنتج (ع) نلاحظ تساوى فائض المساهمة للوحدة مع التكلفة الإقتصادية للوحدة الواحدة = ٨ جنيه . ومن هنا نجد أن النموذج رشح لنا هذا المنتج ضمن برنامج الإنتاج الأمثل للشركة .

ملاحظات على أسعار الظل فى المثال السابق :

(١) لدينا ثلاث قيم لأسعار الظل وهى (صفر ، ١ ، ٢/٣) وهى تمثل قيمة محتسبة تحدد مدى مساهمة الوحدة الواحدة من عناصر الإنتاج الثابتة فى تحقيق القيمة المثلى لدالة الهدف ، كما يمثل سعر الظل القيمة الإقتصادية للوحدة الواحدة من كل عنصر من هذه العناصر .

(٢) مما لاشك فيه أن كلما كان سعر الظل المقابل لأحد الموارد أو العناصر (القيود) مرتفعاً كلما كان ذلك دلالة قوية على أن هذا المورد يمثل "**نقطة اختناق**" بالنسبة للمنشأة ، مع العلم بأن هذا الارتفاع فى سعر الظل لايمثل ظاهرة صحية لأنه يدل على عدم توازن الطاقات .

(٣) تمثل أسعار الظل تكلفة الفرصة البديلة (المضاعة) Opportunity Cost لأى عنصر من عناصر المنشأة . ومن هنا فى حالة نفاذ أو إستغلال الطاقة المتاحة بالكامل لأحد الأقسام ، فهذا يدل على أنه بالضرورة لابد أن يكون سعر الظل يساوى "صفر" .

(٤) فى حالة عدم نفاذ الطاقة المتاحة فى أحد الأقسام الإنتاجية بالشركة (المنشأة) ، ليس هناك جدوى إقتصادية فى زيادة ساعات الطاقة المتاحة لهذا

Scanned with CamScanner

القسم خلال الفترة القادمة ، أى أن القيمة الإقتصادية لهذه الزيادة تساوى صفر جنيه ، لأن القيمة الإقتصادية لسعر الظل لهذا القسم تساوى "صفر جنيه" .

(٥) إذا كان لدينا ضمن قيم أسعار الظل قيم سالبة ، فهذا يدل على مقدار التضحية الإقتصادية **(الخسارة الإقتصادية)** التى تتحملها المنشأة (الشركة) مقابل توريد كل وحدة من منتج معين نتيجة لوجود علاقات تعاقد مسبقة من أحد العملاء أو نتيجة لوجود علاقات تلازم تجارى أو فنى بين المنتجات المرشحة ضمن البرنامج . وهذه الحتمية أوجبت نوعاً من الدوران حسابياً فى نموذج البرمجة الخطية حول منطق قاعدة تعادل العائد مع التكلفة الإقتصادية ، وهو منطق غلاب . فإذا كانت التكلفة الإقتصادية للعناصر المستهلكة فى إنتاج الوحدة ١٥ جنيه وعائدها ١٢ جنيه ، فيكون سعر الظل للقيد يساوى = (-٣) بحيث أنه عند جمعها جبرياً على ١٥ جنيه يصبح الصافى (١٢ جنيه) مساوياً العائد ويقبل المنتج فى خلطة المنتجات .

٤/٣/٢. حالات خاصة لمشاكل بناء نموذج البرمجة الخطية :

مما لاشك فيه قد يكون من الملائم أن نسرد بعض الأمثلة التى تتناول مشاكل بناء نماذج البرمجة الخطية فى حالات معينة منها مايلى :

الحالة الأولى : مواجهة سياسة التمييز السعرى لأحد المنتجات .

سوف نتناول المثال التالى لتوضيح كيفية مواجهة نموذج البرمجة الخطية لسياسة التمييز السعرى لأحد المنتجات بالشركات الصناعية :

تنتج شركة عبدالله الحازمى الحديثة ثلاثة أنواع من المنتجات هى (أ ، ب ، جـ) . ويوضح الجدولين رقمى (١) ، (٢) البيانات الخاصة بالإنتاج والتكاليف والطاقة المتاحة وكذلك الإيرادات المتوقعة من الإدارة المالية تمهيداً لإعداد برنامج الإنتاج الأمثل للعام القادم . أما بالنسبة للمنتج (أ) يتصف بأنه من المنتجات بطيئة الحركة ويتم تحديد سعره حسب الكمية كما بالجدول رقم (٣) .

Scanned with CamScanner

جدول (١)

القسم	الطاقة المتاحة بالساعة	التكاليف الثابتة بالجنيه
١	٣٠٠٠	٣٢٠٠
٢	٦٠٠٠	٣٨٠٠

جدول (٢)

المنتج	الساعات اللازمة لإنتاج الوحدة		سعر بيع الوحدة/ج	التكلفة المتغيرة للوحدة / ج	فائض المساهمة للوحدة / ج
	قسم (١)	قسم (٢)			
أ	٢	صفر	؟	١٥	؟
ب	صفر	٣	٢٥	٢٢	٣
جـ	٤	٦	٣٥	١٢	٢٣

جدول (٣)

الإنتاج المسلم بالوحدة	سعر بيع الشركة من المنتج (أ) بالجنيه
١ ← ٢٠٠	٣٠
٢٠١ ← ٧٠٠	٢٣

وترغب إدارة الشركة فى رسم برنامج الإنتاج الأمثل تمهيداً لأعداد الميزانية التقديرية للعام القادم .

والمطلوب :

(١) تحديد البرنامج الأمثل للشركة .

(٢) تحديد صافى الأرباح التى تترتب على هذا البرنامج .

Scanned with CamScanner

الحـل

* **تمهيداً للحل :**

(١) المنتج (أ) يتمثل فى شريحتين فى سعر البيع وهما (٣٠ ، ٢٣ جنيه) ، بينما التكلفة المتغيرة للوحدة ثابتة وقدرها = ١٥ جنيه .

(٢) فائض المساهمة للمنتج (أ) من الشريحة (١ – ٣٠٠ وحدة) =

٣٠ – ١٥ = ١٥ جنيه ويرمز لها بالرمز ($س_{١١}$) .

∴ فائض المساهمة للمنتج (أ) من الشريحة (٣٠١ – ٧٠٠ وحدة) =

٢٣ – ١٥ = ٨ جنيه ويرمز لها بالرمز ($س_{٢١}$) .

* **تحضير (تكوين) المشكلة الأصلية :**

(١) دع :

$س_{١١}$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (أ) – شريحة أولى .

$س_{٢١}$ = عدد الوحدات التى يجب من المنتج (أ) – شريحة ثانية .

$س_{٢}$ = عدد التى يجب إنتاجها من المنتج (ب) .

$س_{٣}$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (جـ) .

(٢) أوجد قيمة كلا من ($س_{١١}$ ، $س_{٢١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$) التى تجعل

ف = ١٥$س_{١١}$ + ٨ $س_{٢١}$ + ٣$س_{٢}$ + ٢٣$س_{٣}$ (أكبر ما يمكن)

(٣) أخذاً فى الإعتبار :

٢$س_{١١}$ + ٢$س_{٢١}$ + ٤$س_{٣}$	≤ ٣٠٠٠
٣$س_{٢}$ + ٦$س_{٣}$	≤ ٦٠٠٠
$س_{١١}$	≤ ٣٠٠
$س_{٢١}$	≤ ٤٠٠
$س_{١١}$ ، $س_{٢١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$	≤ صفر

Scanned with CamScanner

* صياغة المشكلة المعدلة :

(١) ف = ١٥س١١ + ٨ س٢١ + ٣س٣ + ٢٣س٢ + (٠) س٤ + (٠) س٥ + (٠) س٦ + (٠) س٧ (أكبر ما يمكن)

(٢) بشرط :

٢س١١ + ٢س٢١ + ٤س٣ + س٤	= ٣٠٠٠
٣س٣ + ٦س٣ + س٥	= ٦٠٠٠
س١١ + س٦	= ٣٠٠
س٢١ + س٧	= ٤٠٠

س١١ ، س٢١ ، س٣ ، ... ، ..... ، س٧ ≥ صفر

(٣) سوف نترك للطالب القيام بحل تابلوهات المشكلة بطريقة السمبلكس The Simplex Mathod والذى ينتج لنا أن برنامج الإنتاج الأمثل هو :

س١١ = ٣٠٠ وحدة من المنتج (أ) – شريحة أولى بسعر ٣٠ جنيه .

س٢١ = صفر وحدة من المنتج (أ) – شريحة ثانية بسعر ٢٣ جنيه .

س٣ = ٨٠٠ وحدة من المنتج (ب) .

س٣ = ٦٠٠ وحدة من المنتج (جـ)

ف = فائض المساهمة الكلى للشركة = ٢٠٧٠٠ جنيه

صافى أرباح الشركة = ٢٠٧٠٠ – ٧٠٠٠ = ١٣٧٠٠ جنيه

(٤) مطلوب من الطالب تفسير أسعار الظل فى هذا المثال على نمط ما قمنا به من قبل فى المثال السابق .

الحالة الثانية :

كيفية تعامل نموذج البرمجة الخطية فى حالة التعاقدات المسبقة وعلاقات خاصة بين المنتجات .

Scanned with CamScanner

وصف المشكلة :

قامت شركة عبدالله الخطابى باعداد الميزانية التقديرية للإنتاج كخطوة أساسية لإعداد الميزانية التقديرية الشاملة . وفى سبيل إعداد الميزانية التقديرية للإنتاج قامت الإدارة المالية بتجميع البيانات التالية :

المنتج	الساعات اللازمة لإنتاج الوحدة		سعر بيع للوحدة/ج	تكلفة متغيرة للوحدة / ج	فائض المساهمة للوحدة / ج
	قسم (١)	قسم (٢)			
أ	٣	٢	٢٠	١٤	٦
د	٤	٦	٢٣	١٦	٧
هـ	٢	٤	٣١	٢٣	٨
الطاقة المتاحة	١٢٠٠	٢٠٠٠			

وترغب إدارة الشركة ابرام عقد طويل الآجل وتلتزم فيه بتوريد ٢٠٠ وحدة على الأقل من المنتج (د) . كما ترغب الشركات المستهلكة لنوعى المنتجات (أ ، هـ) أن تقوم بشراء وحدتين من المنتج (أ) مقابل كل وحدة تقوم بشرائها من المنتج (هـ) ، بمعنى أن تكون الكمية من المنتج (أ) ضعف الكمية المنتجة من المنتج (هـ) . فإذا علمت أن التكاليف الثابتة الكلية للشركة = ١٤٠٠ جنيه .

والمطلوب :

(١) تحديد برنامج الإنتاج الأمثل للشركة .

(٢) تحديد صافى الأرباح للشركة التى تترتب على هذا البرنامج .

الحل

(١) صياغة المشكلة الأصلية :

دع أن :

$س_1$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (أ) .

Scanned with CamScanner

$س_3$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (د) .

$س_4$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (هـ) .

أوجد قيمة كلا من ($س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$) التى تجعل :

ف = ٦$س_1$ + ٧$س_2$ + ٨$س_3$ (أكبر ما يمكن)

أخذاً فى الإعتبار :

٣$س_1$ + ٤$س_2$ = ٢$س_3$ ≤ ١٢٠٠

٢$س_1$ + ٦$س_2$ = ٤$س_3$ ≤ ٢٠٠٠

$س_3$ ≤ ٢٠٠ علاقة التعاقد المسبقة بين العميل والمنشأة

$س_1$ = ٢$س_3$ علاقة خاصة بين المنتجات (تلازم فنى)

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ≥ صفر

(٢) صياغة المشكلة المعدلة :

تمهيد :

(أ) القيد الأول يضاف له متغير قصور وهو ($س_4$) ويصبح معادلة .

(ب) القيد الثانى يضاف له متغير قصور وهو ($س_5$) ويصبح معادلة .

(جـ) القيد الثالث يضاف له متغير فائض وهو ($س_6$) ومتغير وهمى ($س_7$) .

(د) القيد الرابع يضاف له متغير وهمى فقط ($س_8$) .

(هـ) يتم حل هذا النوع من مشاكل البرمجة الخطية بطريقتين هما :

(١) طريقة (م) الكبرى . The Big (M) Method

(٢) طريقة المرحلتين . The Two-phase Method

ف = ٦$س_1$ + ٧ $س_2$ + ٨ $س_3$ + (٠) $س_4$ + (٠٩٠$س_5$ + (٠) $س_6$ (-م) $س_7$ - (-م) $س_8$

أكبر ما يمكن

بشرط :

٣$س_1$ + ٤$س_2$ + ٢$س_3$ - $س_4$ = ١٢٠٠

$٢س_{٣} + ٦س_{٣} + ٤س_{٣} + س_{٥}$ = ٢٠٠٠

$س_{٣} - س_{٦} + س_{٧}$ = ٢٠٠

$س_{١} - ٢س_{٣} + س_{٨}$ = صفر

$س_{١}$ ، $س_{٣}$ ، $س_{٣}$ ، ... ، ..... ، $س_{٨}$ ≥ صفر

ويعد قيام الطالب بتجهيز تابلوهات بطريقة السمبلكس يمكن أن يصل إلى برنامج الإنتاج الأمثل على النحو التالى :

$س_{١}$ = ١٠٠ وحدة من المنتج (أ) .

$س_{٣}$ = ٢٠٠ وحدة من المنتج (ب) .

$س_{٣}$ = ٥٠ وحدة من المنتج (هـ)

ف = فائض المساهمة الكلى للشركة = ٢٤٠٠ جنيه

صافى أرباح الشركة = ٢٤٠٠ - ١٤٠٠ = ١٠٠٠ جنيه .

ملحوظة : على الطالب أن يقوم بتحديد أسعار الظل بعد قيامه بتكوين تابلوهات السمبلكس ، وأخر تابلوه يمثل الحل الأمثل للمشكلة ، ويشرح عليها بعض خواص أسعار الظل Shadow Prices .

٥/٣/٢. تطبيقات عملية على نموذج البرمجة الخطية

التطبيق الأول :

قامت شركة عبدالرحمن العمودى بإعداد الميزانية التقديرية للإنتاج كخطوة أساسية لإعداد الميزانية التقديرية الشاملة . وفى سبيل إعداد الميزانية التقديرية للإنتاج قامت الإدارة المالية بتجميع البيانات التالية :

المنتج	الساعات اللازمة لإنتاج الوحدة		سعر بيع للوحدة/ج	تكلفة متغيرة للوحدة / ج	فائض المساهمة للوحدة / ج
	قسم(١)	قسم(٢)			
أ	٣	٢	١٥	٩	٦
ب	٤	٦	١٨	١١	٧
جـ	٢	٤	٢٠	١٢	٨
الطاقة المتاحة	١٢٠٠	٢٠٠٠			

Scanned with CamScanner

وعلى فرض أن الشركة قد تعاقدت مسبقاً على توريد ٥٠ وحدة على الأقل من المنتج (أ) خلال الفترة القادمة .

والمطلوب .

(١) تحديد برنامج الإنتاج الأمثل للشركة .

(٢) تحديد الأرباح الصافية التى تترتب على هذا البرنامج علماً بأن التكاليف الثابتة الإجمالية = ١٧٠٠ جنيه .

(٣) ما مقدار التضحية الإقتصادية التى تتحملها الشركة من وراء العلاقة التعاقدية المسبقة .

التطبيق الثانى :

لديك التابلوه الأول (المبدئى) والتابلوه النهائى لحل أحد البرامج الخطية لبرنامج الإنتاج الأمثل للمنتجين (أ ، ب) ، مع العلم بأن معاملات دالة الهدف بالجنيه ، والطاقة المتاحة بالساعة .

التابلوه الأول (المبدئى)

معادلات دالة الهدف ومتغيرات المشكلة		٦ $س_1$	٨ $س_2$	صفر $س_3$	صفر $س_4$	صفر $س_5$	مقادير الطرف الأيسر
صفر	$س_3$	٢	٢	١	صفر	صفر	١٦
صفر	$س_4$	٥	١٠	صفر	١	صفر	٥٠
صفر	$س_5$	صفر	٣	صفر	صفر	١	٩
صف إختبار المثالية		(-٦)	(-٨)	صفر	صفر	صفر	صفر

Scanned with CamScanner

التابلوه الأخير (النهائى)

معادلات دالة الهدف / متغيرات المشكلة		٦ س١	٨ س٣	صفر س٣	صفر س٤	صفر س٥	مقادير الطرف الأيسر
صفر	س٣	صفر	صفر	٢/٢	-٣/٥	١	٣
٦	س١	١	صفر	١	-١/٥	صفر	٦
٨	س٣	صفر	١	-١/٢	١/٥	صفر	٢
صف إختيار المثالية		صفر	صفر	٢	٢/٥	صفر	٥٢

والمطلوب :

(١) إعادة صياغة المشكلة الأصلية والمعدلة فى شكل رياضى .

(٢) تحديد المتغير المرشح للدخول والمرشح للخروج من التابلوه الأول (المبدئى) .

(٣) تحديد الحل الأمثل وقيمة دالة الهدف فى هذا الحل .

(٤) تحديد أسعار الظل لهذا الحال وتفسير معناها المحاسبى للشركة .

(٥) تحديد التكلفة الإقتصادية للمنتج (أ) والذى يرمز له بالرمز (س١) .

التطبيق الثالث :

"من بين العبارات التى يحلو للبعض ترديدها حول أسعار الظل Shadow Prices بأنها قيم محتسبة تحدد مدى مساهمة الوحدة الواحدة من عناصر الإنتاج الثابتة فى تحقيق فائض المساهمة الكلى للمنشأة" .

(أ) اشرح هذه العبارة موضحاً مفهوم أسعار الظل .

(ب) إشرح بعض الخواص الهامة لأسعار الظل .

التطبيق الرابع :

قامت شركة عبدالرحمن القحطانى باعداد الميزانية التقديرية للإنتاج كخطوة أساسية على طريق إعداد الميزانية التقديرية الشاملة . وقامت الإدارة المالية بتجميع البيانات التالية

Scanned with CamScanner

المنتج	الساعات لازمة لإنتاج الوحدة		سعر بيع للوحدة/ج	تكلفة متغيرة للوحدة / ج	فائض المساهمة للوحدة / ج
	قسم (١)	قسم (٢)			
أ	٣	٢	١٥	٩	٦
ب	٤	٦	١٨	١١	٧
جـ	٢	٤	٢٠	١٢	٨
الطاقة المتاحة	١٢٠٠	٢٠٠٠			

فعلى فرض أن الشركة قد تعاقدت مسبقاً على توريد ٥٠ وحدة على الأقل من المنتج (أ) خلال الفترة القادمة .

والمطلوب :

(١) تحديد برنامج الإنتاج الأمثل للشركة .

(٢) تحديد صافى أرباح الشركة من هذا البرنامج ، علماً بأن التكاليف الثابتة الأجمالية = ٢٠٠٠ جنيه .

(٣) كما تتكلف الشركة من تضحية إقتصادية جراء العلاقة التعاقدية المسبقة من توريد كمية من المنتج (أ) .

(٤) بين أسعار الظل وفسر معناها بإيجاز .

(٥) عند إختيار برنامج الإنتاج الأمثل للشركة . هل جاء معيار المفاضلة مطلقاً أم نسبياً فى حل هذه المشكلة .

"حل التطبيق الرابع"

أولاً : تحضير (تكوين) مشكلة البرمجة الخطية

(أ) التعبير عن مستويات الإنتاج المطلوبة فى صورة رموز جبرية

Scanned with CamScanner

د ع :

$س_1$ = عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج (أ)

$س_2$ = عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج (ب)

$س_3$ = عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج (جـ)

(ب) صياغة دالة الهدف (معيار الأفضلية) :

$ف = ٦س_1 + ٧س_2 + ٨س_3$ (أكبر ما يمكن)

(جـ) صياغة قيود المشكلة :

(١) قيد خاص بالقسم الأول $٣س_1 + ٤س_2 + ٢س_3 \leq ١٢٠٠$

(٢) قيد خاص بالقسم الثانى $٢س_1 + ٦س_2 + ٤س_3 \leq ٢٠٠٠$

(٣) قيد العلاقة التعاقدية $س_1 \leq ٥٠$

(٤) قيد عدم السالبة $س_1 ، س_2 ، س_3 \geq$ صفر

ثانياً : المشكلة المعدلة

$ف = ٦س_1 + ٧س_2 + ٨س_3 + (٠) س_4 + (٠) س_5 + (٠) س_6 - م س_7$

بشرط أن : (أكبر ما يمكن)

$٣س_1 + ٤س_2 + ٢س_3 + س_4 = ١٢٠٠$

$٣س_1 + ٦س_2 + ٤س_3 + س_5 = ٢٠٠٠$

$س_1 - س_6 + س_7 = ٥٠$

$س_1 ، س_2 ، س_3 ، ..... ، س_7 \geq$ صفر

Scanned with CamScanner

ثالثاً : حل المشكلة بطريقة السمبلكس The Simplex Method

			٦	٧	٨	صفر	صفر	صفر	-م		
			س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧		
صفر	س٤		٣	٤	٢	١	صفر	صفر	صفر	١٢٠٠	٤٠٠
صفر	س٥		٢	٦	٤	صفر	١	صفر	صفر	٢٠٠٠	١٠٠٠
-م	س٧		(١)	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	١	٥٠	٥٠*
صف إختبار مثالية الحل			(-م-٦)	(-٧)	(-٨)	صفر	صفر	صفر	صفر	-٥٠م	
صفر	س٤		صفر	٤	٢	١	صفر	٣	-٣	١٠٥٠	٥٢٥
صفر	س٥		صفر	٦	(٤)	صفر	١	٢	-٢	١٩	٤٧٥*
٦	س١		١	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	١	٥٠	-
صف إختبار مثالية الحل			صفر	(-٧)	(-٨)	صفر	صفر	-٦	٦+م	٣٠٠	
صفر	س٤		صفر	١	صفر	١	صفر	-١/٢	-٢ (٢)	١٠٠	٥٠*
٨	س٣		صفر	٣/٢	١	صفر	١/٤	١/٢	-١/٢	٤٧٥	٩٥٠
٦	س١		١	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	١	٥٠	-
صف إختبار مثالية الحل			صفر	٥	صفر	صفر	صفر	٢	-٢*	٤١٠٠	
صفر	س٦		صفر	١/٢	صفر	١/٢	-١/٤	١	-١	٥٠	
٨	س٣		صفر	٥/٤	١	-١/٤	٣/٨	صفر	صفر	٤٥٠	
٦	س١		١	١/٢	صفر	١/٢	-١/٤	صفر	صفر	١٠٠	
صف إختبار مثالية الحل			صفر	٥	صفر	١	٣/٢	صفر	صفر	٤٢٠٠	

من الجدول الوارد فى الصفحة السابقة يتضح لنا أن الحل الأمثل هو :

س١ = ١٠٠ وحدة من المنتج (أ)

س٣ = صفر وحدة من المنتج (ب)

س٣ = ٤٥٠ وحدة من المنتج (جـ)

Scanned with CamScanner

$س_٤$ = صفر ساعة ، تمثل بأن الطاقة مستغلة بالكامل بالقسم (١)

$س_٥$ = صفر ساعة ، تمثل بأن الطاقة مستغلة بالكامل بالقسم (٢)

$س_٦$ = ٥٠ وحدة ، وهى تمثل عدد الوحدات الفائضة عن العلاقة التعاقدية المسبقة (حيث رشح لنا النموذج ١٠٠ وحدة بينام التعاقد على ٥٠ وحدة فقط) .

ى = فائض المساهمة للشركة = ٤٢٠٠ جنيه

٢ - صافى الدخل للشركة = فائض المساهمة الإجمالى - التكاليف الثابتة الإجمالية .

∴ صافى الدخل للشركة = ٤٢٠٠ - ١٧٠٠ = ٢٥٠٠ جنيها .

٣ - لم تتكلف الشركة أى تضحية إقتصادية من وراء العلاقة التعاقدية مسبقة على توريد ٥٠ وحدة على الأقل من المنتج (أ) خلال الفترة المذكورة . وهذا يتضح من التابلوه الأخير الذى يحل الحل الأمثل أن فائض المساهمة للوحدة من المنتج (أ) = ٦ جنيها يتعادل مع التكلفة الإقتصادية للوحدة من المنتج (أ) أيضاً على النحو التالى .

∴ التكلفة الإقتصادية للوحدة من المنتج (أ) =

(١ × ٣) + ($٣/٢$ × ٢) + (صفر × ١) = ٦ جنيها، حيث أن أسعار الظل هى (١ ، $٣/٢$ ، صفر) ، بينما القيم (٣ ، ٢ ، ١) تمثل قيم عمود المتغير ($س_١$) فى تابلوه الحل المبدئى .

"حل التطبيق الثانى"

(١) صياغة المشكلة الأصلية والمعدل فى شكل رياضى :

أ - المشكلة الأصلية

دع أن

$س_١$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (أ) .

$س_٢$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (ب)

Scanned with CamScanner

ثالثاً : حل المشكلة بطريقة السمبلكس The Simplex Method

		٦	٧	٨	صفر	صفر	صفر	-م	
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	
صفر	س٤	٣	٤	٢	١	صفر	صفر	صفر	١٢٠٠
صفر	س٥	٢	٦	٤	صفر	١	صفر	صفر	٢٠٠٠
-م	س٧	(١)	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	١	٥٠
صف إختبار مثالية الحل		(-م-٦)	(-٧)	(-٨)	صفر	صفر	صفر	صفر	-٥٠م
صفر	س٤	صفر	٤	٢	١	صفر	٣	-٣	١٠٥٠
صفر	س٥	صفر	٦	(٤)	صفر	١	٢	-٢	١٩٠
٦	س١	١	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	١	٥٠
صف إختبار مثالية الحل		صفر	(-٧)	(-٨)	صفر	صفر	-٦	٦+م	٣٠٠
صفر	س٤	صفر	١	صفر	١	-١/٢	(٢)	-٢	١٠٠
٨	س٣	صفر	٣/٢	١	صفر	١/٤	١/٢	-١/٢	٤٧٥
٦	س١	١	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	١	٥٠
صف إختبار مثالية الحل		صفر	٥	صفر	صفر	صفر	٢	-٢*	٤١٠٠
صفر	س٦	صفر	١/٢	صفر	١/٢	-١/٤	١	-١	٥٠
٨	س٣	صفر	٥/٤	١	-١/٤	٣/٨	صفر	صفر	٤٥٠
٦	س١	١	١/٢	صفر	١/٢	-١/٤	صفر	صفر	١٠٠
صف إختبار مثالية الحل		صفر	٥	صفر	١	٣/٢	صفر	صفر	٤٢٠٠

٤٠٠ ١٠٠٠ ٥٠* ٥٢٥ ٤٧٥* - ٥٠* ٩٥٠ - ٤٥٠

من الجدول الوارد فى الصفحة السابقة يتضح لنا أن الحل الأمثل هو :

س١ = ١٠٠ وحدة من المنتج (أ)

س٣ = صفر وحدة من المنتج (ب)

س٣ = ٤٥٠ وحدة من المنتج (جـ)

Scanned with CamScanner

$س_3$ = صفر ساعة ، تمثل بأن الطاقة مستغلة بالكامل بالقسم (١)

$س_4$ = صفر ساعة ، تمثل بأن الطاقة مستغلة بالكامل بالقسم (٢)

$س_5$ = ٥٠ وحدة ، وهى تمثل عدد الوحدات الفائضة عن العلاقة التعاقدية المسبقة (حيث رشح لنا النموذج ١٠٠ وحدة بينام التعاقد على ٥٠ وحدة فقط) .

ى = فائض المساهمة للشركة = ٤٢٠٠ جنيه

٢ - صافى الدخل للشركة = فائض المساهمة الإجمالى - التكاليف الثابتة الإجمالية .

∴ صافى الدخل للشركة = ٤٢٠٠ - ١٧٠٠ = ٢٥٠٠ جنيها .

٣ - لم تتكلف الشركة أى تضحية إقتصادية من وراء العلاقة التعاقدية المسبقة على توريد ٥٠ وحدة على الأقل من المنتج (أ) خلال الفترة المذكورة . وهذا يتضح من التابلوه الأخير الذى يحل الحل الأمثل أن فائض المساهمة للوحدة من المنتج (أ) = ٦ جنيها يتعادل مع التكلفة الإقتصادية للوحدة من المنتج (أ) أيضاً على النحو التالى .

∴ التكلفة الإقتصادية للوحدة من المنتج (أ) =

(١ × ٣) + ($٣/_{٢}$ × ٢) + (صفر × ١) = ٦ جنيها، حيث أن أسعار الظل هى (١ ، $٣/_{٢}$ ، صفر) ، بينما القيم (٣ ، ٢ ، ١) تمثل قيم عمود المتغير ($س_1$) فى تابلوه الحل المبدئى .

"حل التطبيق الثانى"

(١) صياغة المشكلة الأصلية والمعدل فى شكل رياضى :

أ - المشكلة الأصلية

نـ ع أن

$س_1$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (أ) .

$س_2$ = عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج (ب)

Scanned with CamScanner

فى التابلوه الأخير من هذا الجدول وفى صف إختبار المثالية (أى الصف الأخير فى التابلوه) وتحت الأعمده الأضافيه يوجد هناك مجموعة من الأرقام أحطناها بمستطيل مميز الجوانب . ومجموعة الأرقام هذه (٧ ، ٤ ، ١٥) والتى يقابل كل منها أحد القيود الوارده فى المشكلة هى بعينها التى يدور حولها هذا الفصل . وتسمى هذه الأرقام بمسميات مختلفه نورد من بينها أكثرها شهرة وهى الخمسة التالية

١ - أسعار الظل — Shadow prices

٢ - القيم الثنائية أو المقابله — Dual value

٣ - محددات القيم الثنائية أو المقابلة — Dual Evaluators

٤ - الأسعار المحاسبية — Accounting Prices

٥ - تكلفة الفرصة البديله — Opporiunlty Cost

وقبل أن نحاول تفسير محتوى هذه المجموعة من الأرقام لننظر أولاً إلى بعض خواصها الميكانيكية . ولسوف يساعدنا على ذلك كثيراً لو أننا ظللنا نذكر أن لدينا ثلاثة من الموارد أو عناصر الإنتاج وأن عدد الساعات (أو الوحدات بصفه عامه) المتاحه من كل هى ٢٠٠٠٠ ، ٦٣٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ وحده من العنصر الأول فالثانى فالثالث على الترتيب .

ثم علينا أن نقبل بالمقابله التاليه : يوجد لدينا ثلاثة من الموارد أو عناصر الإنتاج ، كما أن بالمستطيل المميز الجوانب ثلاثة أرقام . فلنتقبل منذ الان تلك الحقيقه ألا وهى أن الرقم الأول (أى ٧) يتعلق بالعنصر الأول ، والرقم الثانى (أى ٤) ، يتعلق بالعنصر الثانى ، والرقم الثالث (أى ١٥) يتعلق بالعنصر الثالث (١)

---

(١) نجد لزاما علينا أن نلفت النظر هنا إلى أن مجموعة الخواص التى سوف نوردها هنا لها من العموميه ما يجعلها تنطبق على أية مشكلة بصرف النظر عن محتواها ، وأننا عندما نورد شرح هذه الخواص مستعيبين بمحتوى مشكلة بعينها فإن هذا من قبيل تخليص أسلوب العرض من التجريد الذى قد لايروق الكثيرين